

***Badanie chaosu
kwantowego w układach
otwartych***

Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk

**Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Leszka Sirko**

Warszawa 2011

Rozprawa doktorska współfinansowana przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, projekt promotorski numer N N202 338838, POIG.01.01.02-00-008/08 oraz Europejski Fundusz Społeczny.

Serdecznie dziękuję:

*prof. dr. hab. Leszkowi Sirko za opiekę, życzliwość
i wszechstronną pomoc w napisaniu niniejszej pracy oraz
mgr. Szymonowi Bauchowi za dyskusje oraz cenne rady,
które wzbogaciły jej wartość.*

Spis treści

1. Wstęp

- 1.1. Chaos klasyczny a chaos kwantowy..... str. 10
- 1.2. Teoria macierzy przypadkowych..... str. 14
- 1.3. Przykłady układów chaotycznych
 - 1.3a. Grafy klasyczne i grafy kwantowe..... str. 18
 - 1.3b. Bilardy klasyczne i bilardy kwantowe..... str. 20

2. Doświadczalna symulacja kwantowych układów chaotycznych

- 2.1. Doświadczalna symulacja grafów kwantowych..... str. 24
- 2.2. Doświadczalna symulacja bilardów kwantowych.....str. 29
- 2.3. Układ doświadczalny
 - 2.3a. Sieci mikrofalowe..... str. 33
 - 2.3b. Trójwymiarowa wnęka mikrofalowa.....str. 35
 - 2.3c. Mikrofalowe analizatory wektorowe..... str. 36

3. Doświadczalne badanie statystycznych właściwości widm układów mikrofalowych symulujących chaotyczne układy kwantowe z absorpcją

- 3.1. Skalowanie energii i doświadczalne wyznaczanie rozkładu najbliższych sąsiadów..... str. 39
- 3.2. Rozkład macierzy reakcji Wignera i współczynnika odbicia R
 - 3.2a. Rozkład macierzy reakcji Wignera i współczynnika odbicia R dla sieci mikrofalowychstr..... str. 46
 - 3.2b. Rozkład macierzy reakcji Wignera i współczynnika odbicia R dla trójwymiarowych wnęk mikrofalowych..... str. 56
- 3.3. Funkcje korelacji macierzy rozpraszania
 - 3.3a. Funkcje korelacji krzyżowej macierzy rozpraszania..... str. 62
 - 3.3b. Funkcja autokorelacji macierzy rozpraszania..... str. 67
- 3.4. Elastyczny współczynnik wzmocnienia..... str. 70

4. Podsumowanie..... str. 75

Bibliografia..... str. 77

1. Wstęp

1.1. Chaos klasyczny a chaos kwantowy

Starożytni Grecy chaosem nazywali bezkształtną masę, z której wyłonił się uporządkowany wszechświat. Z czasem pojęcie to nabrało znaczenia pejoratywnego. Chaos, jako stan nieporządku i nieregularności zaczęto utożsamiać ze złem, natomiast harmonia i ład stały się synonimem dobra. Ludzkość od wieków poszukiwała regularności w przyrodzie, próbując odkryć i pojąć prawa rządzące światem. Nauka miała w tej dziedzinie tak wiele osiągnięć, iż w XVIII wieku świat zaczęto postrzegać jako „mechanizm zegarowy” [1]. Uważano, że każdy układ dynamiczny można opisać za pomocą deterministycznej formuły matematycznej w postaci równań różniczkowych, określających ewolucję stanu układu w funkcji czasu [2]:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)], \quad (1.1.1)$$

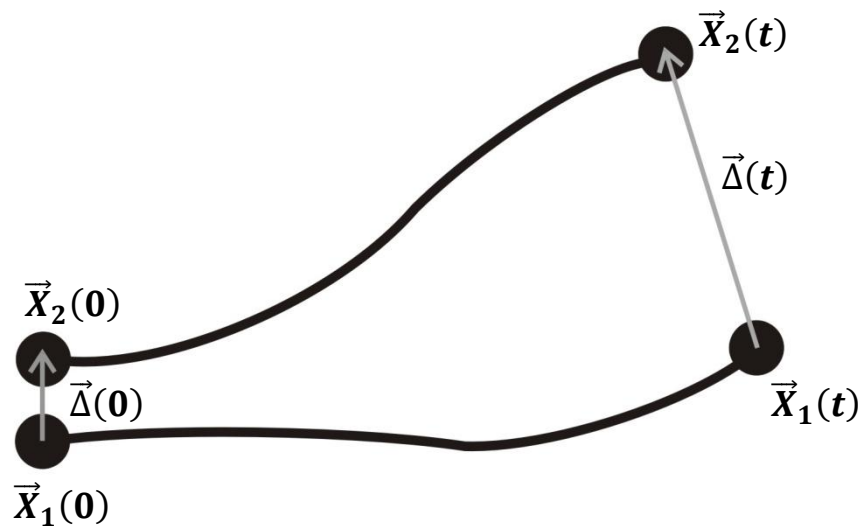
gdzie wielkość $\vec{x}(t)$ jest wektorem N wymiarowym. Rozwiązując powyższy układ równań dla dowolnego stanu początkowego $\vec{x}(0)$, możemy otrzymać przyszły stan układu $\vec{x}(t)$ dla $t > 0$.

Sądono, iż orbity reprezentujące ewolucję układu w przestrzeni fazowej powinny być regularne. W XIX wieku francuski matematyk H. Poincare odkrył jednak, że w pewnych układach mechanicznych orbity mogą mieć charakter chaotyczny [3]. Konsekwencje tego odkrycia nie zostały niestety w pełni docenione ani przez ówczesnych badaczy, ani przez ich następców. Nawet Einstein był przekonany o całkowitym determinizmie praw rządzących naturą, co wyraził w słowach skierowanych do Maxa Borna: „Ty wierzysz w Boga, który gra w kości, a ja w prawa i zupełny porządek”¹. Einstein mówił co prawda o mechanice kwantowej, jednak słowa te dobrze ukazują postawę, która była charakterystyczna dla większości współczesnych mu naukowców. Sytuacja ta zmieniła się w 1963 roku, gdy meteorolog N.E. Lorenz w wyniku prac nad problemem prognozy pogody odkrył, że już nawet układ trzech

¹ Albert Einstein, List do Maxa Borna

sprzężonych nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu może prowadzić do chaotycznych orbit [4]. Od tego momentu zaczęto mówić o chaosie deterministycznym. Pojęcie to odnosi się do układów, których ewolucja, reprezentowana przez orbity w przestrzeni fazowej, mimo zdeterminowania prawami dynamiki, jest nieregularna i w dłuższym odstępie czasu przestaje być przewidywalna.

Zachowania chaotyczne są wynikiem wykładniczego rozbiegania się początkowo bliskich sobie orbit. Rozpatrzmy układ, który może znajdować się w stanie początkowym $\vec{x}_1(0)$ lub $\vec{x}_2(0)$. Stany te położone są względem siebie w niewielkiej odległości $\vec{\Delta}(0)$ w przestrzeni fazowej. W wyniku ewolucji układu w czasie otrzymujemy odpowiednio dwie orbity: $\vec{x}_1(t)$ oraz $\vec{x}_2(t)$ (Rys. 1.1.1).



Rys. 1.1.1

Przykład ewolucji czasowej układu będącego w stanie początkowym $\vec{x}_1(0)$ lub $\vec{x}_2(0)$.

Jeżeli odległość pomiędzy obiema orbitami rośnie wykładniczo z czasem, tzn. zachodzi:

$$\frac{|\vec{\Delta}(t)|}{|\vec{\Delta}(0)|} \approx \exp(\Lambda t), \quad (1.1.2)$$

to układ taki nazywamy układem chaotycznym. Możemy zatem powiedzieć, że układ chaotyczny jest wykładniczo wrażliwy na warunki początkowe. Lorenz nazwał tę wrażliwość „efektem motyla”. Miarą chaotyczności układu (miarą rozbiegania się orbit) jest wykładnik Lyapunowa $\Lambda > 0$.

Wiemy zatem jak sprawdzić czy układ klasyczny jest układem chaotycznym. A jak wygląda sytuacja z układami kwantowymi? Jedną z fundamentalnych zasad fizyki kwantowej jest zasada nieoznaczoności Heisenberga [5]:

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.1.3)$$

Z zasady tej wynika, iż pomiaru położenia q możemy dokonać jedynie ze skończoną dokładnością Δq zaburzając jednocześnie wartość pędu p o Δp . Powoduje to, że nie jesteśmy w stanie rozróżnić orbit wewnątrz objętości \hbar^n w 2^n wymiarowej przestrzeni fazowej. W mechanice klasycznej występują zatem obszary przestrzeni fazowej, które w mechanice kwantowej są "niewidoczne".

Wynika z tego, iż w przypadku układów kwantowych posługiwanie się kryterium chaotyczności opartym na wykładniczym rozbieganiu się bliskich sobie orbit traci sens. Pojawia się więc pytanie o istnienie innych metod pozwalających określić czy układ kwantowy jest układem chaotycznym. Okazuje się, że w tym celu mogą być wykorzystane statystyczne właściwości widm energetycznych tych układów i to właśnie one będą przedmiotem moich rozważań. W szczególności, metody te będą zastosowane do występujących w przyrodzie układów kwantowych, w których zachodzi zjawisko absorpcji, nazywanych też kwantowymi układami otwartymi.

Wiele zjawisk chaosu falowego, na przykład uniwersalne fluktuacje odległości częstotliwości własnych oraz macierzy rozpraszania, jest bezpośrednio związanych z chaosem kwantowym, tzn. z właściwościami układów kwantowych, których klasyczne odpowiedniki są chaotyczne.

W ostatnich latach nastąpił olbrzymi wzrost zainteresowania badaniem zjawisk chaosu kwantowego i falowego w układach otwartych. Niestety, ze względu na ogromne trudności napotykaną w doświadczeniach, są to głównie badania teoretyczne. Ponieważ doświadczalna weryfikacja przewidywań teoretycznych dla tych układów jest niezwykle trudna na poziomie kwantowym, dlatego też informacje zdobyte na tej drodze są niezwykle pożądane i mogą być wykorzystane chociażby w badaniach takich obiektów oraz zjawisk jak: jonizacja atomów wodoru i metali alkalicznych [6; 7], lasery wibracyjne [8], czy też zaburzone zewnętrznie układy kwantowe [9].

W niniejszej rozprawie przedstawiłem wyniki badań jednowymiarowych sieci oraz trójwymiarowych wnęk mikrofalowych, w których występuje zjawisko

absorpcji. Sieci mikrofalowe symulują otwarte chaotyczne grafy kwantowe. Trójwymiarowe wnęki mikrofalowe nie mają swoich bezpośrednich odpowiedników w trójwymiarowych układach kwantowych [10]. Absorpcja obecna w tych układach powoduje, że metody weryfikacji stopnia ich chaotyczności oraz klasy symetrii zdefiniowanej w teorii macierzy przypadkowych, które bazują na znajomości częstotliwości rezonansów lub energii własnych, przestają być miarodajne. Przeprowadzone przeze mnie doświadczenia potwierdziły, że odpowiednimi kryteriami chaotyczności na poziomie falowym lub kwantowym układów, w których zachodzi absorpcja, mogą być rozkłady współczynnika odbicia, macierzy reakcji Wignera i rozkłady funkcji korelacji krzyżowej oraz elastyczny współczynnik wzmocnienia.

1.2. Teoria macierzy przypadkowych

Od dawna wiadomo, że układy kwantowe, które charakteryzują się taką samą średnią odległością między stanami energetycznymi, mogą posiadać zupełnie odmienne rozkłady tych odległości. Przykłady takich układów pokazano między innymi w pracy Bohigasa i Giannoniego z 1984 [11]. Statystyczny rozkład stosowany do tego typu badań nosi nazwę rozkładu odległości między sąsiednimi poziomami (*ang.* NNSD – Nearest Neighbor Spacing Distribution) [12]. Dla układów regularnych, czyli niechaotycznych, ma on uniwersalny charakter i postać rozkładu Poissona [13]:

$$P(s) = \exp(-s) \quad (1.2.1)$$

gdzie s jest odległością pomiędzy poziomami energetycznymi.

Uniwersalny charakter rozkładu oznacza, że jest on słuszny dla układów należących do tej samej klasy symetrii i nie zależy od ich indywidualnych właściwości.

Czy istnieje lub istnieją zatem uniwersalne rozkłady NNSD w przypadku kwantowych układów chaotycznych? Aby odpowiedzieć na to pytanie posłużono się teorią macierzy przypadkowych (*ang.* RMT – Random Matrix Theory) [14]. Teoria ta została opracowana w latach sześćdziesiątych na użytek fizyki jądrowej [15; 16]. Podstawą teorii RMT jest założenie, że widma poziomów energetycznych układów chaotycznych mają takie same właściwości statystyczne, jak zespoły losowo wybranych macierzy, traktowanych jako hamiltoniany tych układów. Pokazano, iż można wyróżnić trzy podstawowe zespoły takich macierzy, które są zdefiniowane przez symetrię hamiltonianu [17; 18; 19]. Są to zespoły macierzy dla:

- Hamiltonianów układów mających symetrię ze względu na odwrócenie czasu. Zbiór zmiennych losowych dla tych układów nazywany jest ortogonalnym zespołem Gaussa (Gaussian Orthogonal Ensemble – GOE). Hamiltoniany te są ortogonalnymi macierzami rzeczywistymi:

$$H_{mn} = H_{nm}, \quad (1.2.2)$$

- Hamiltonianów układów ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu. Zbiór zmiennych losowych dla tych układów nazywany jest unitarnym zespołem Gaussa (Gaussian Unitary Ensemble - GUE). Hamiltoniany te są unitarnymi macierzami hermitowskimi:

$$H_{mn} = H_{nm}^*, \quad (1.2.3)$$

- Hamiltonianów układów o spinie połówkowym, z symetrią ze względu na odwrócenie czasu. Zbiór zmiennych losowych dla tych układów nazywany jest symplektycznym zespołem Gaussa (Gaussian Symplectic Ensemble - GSE). Hamiltoniany te są symplektycznymi macierzami kwaternionowymi:

$$H_{mn} = H_{nm}^{(0)}I + i \sum_{z=1}^3 H_{nm}^{(z)} \sigma_z, \quad (1.2.4)$$

gdzie macierz σ_z jest spinową macierzą Pauliego, macierz $H_{nm}^{(0)}$ jest rzeczywistą macierzą symetryczną, macierze $H_{nm}^{(z)}$ są rzeczywiste i antysymetryczne, a I jest macierzą jednostkową.

Funkcja wagowa losowanych hamiltonianów zależy od klasy symetrii układu β i możemy ją przybliżyć wyrażeniem:

$$P_{N\beta}(H) \approx \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{N(N-1)\beta}{2}} \exp(-A \text{Tr}(H^2)), \quad (1.2.5)$$

gdzie A jest stałą normalizacyjną, N jest wymiarem macierzy H , a $\beta = 1, 2, 4$ odpowiednio dla układów GOE, GUE i GSE.

Odpowiedź na postawione na początku tego rozdziału pytanie brzmi: poza nielicznymi kwantowymi układami, jak na przykład bilardy hiperboliczne na nieregularnych krzywiznach [20; 21], rozkład odległości pomiędzy sąsiednimi poziomami energetycznymi pełni rolę uniwersalnego rozkładu dla układów

kwantowych. NNSD zależy od klasy uniwersalności układów w następujący przybliżony sposób [16] (Rys. 1.2.1):

- Dla układów GOE ($\beta = 1$):

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad (1.2.6)$$

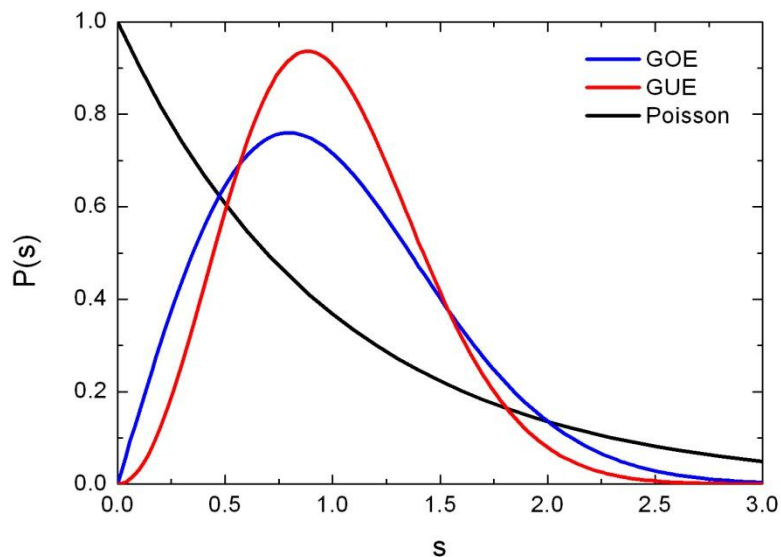
- Dla układów GUE ($\beta = 2$):

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right), \quad (1.2.7)$$

- Dla układów GSE ($\beta = 4$):

$$P(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right). \quad (1.2.8)$$

W ramach niniejszej pracy rozważane będą tylko układy typu GOE i GUE.



Rys. 1.2.1

Rozkłady NNSD dla układów z $\beta = 1$ w RMT (linia niebieska), dla układów z $\beta = 2$ w RMT (linia czerwona) oraz rozkład Poissona dla układów niechaotycznych (linia czarna).

Rozkłady NNSD są najpopularniejszym narzędziem pozwalającym na weryfikację chaotyczności układów kwantowych. Istnieją także inne kryteria chaotyczności układów, bazujące na statystycznych właściwościach widm energetycznych układów kwantowych. Są to między innymi: sztywność spektralna [15], funkcje autokorelacji prędkości poziomów energetycznych [22; 23; 24; 25], szum typu $\frac{1}{f}$ [26].

Niestety, wszystkie te metody, łącznie z rozkładem NNSD, wymagają dobrej znajomości wartości energii własnych i dlatego przestają być skuteczne dla układów, w których występuje absorpcja, co zostanie pokazane w dalszej części pracy.

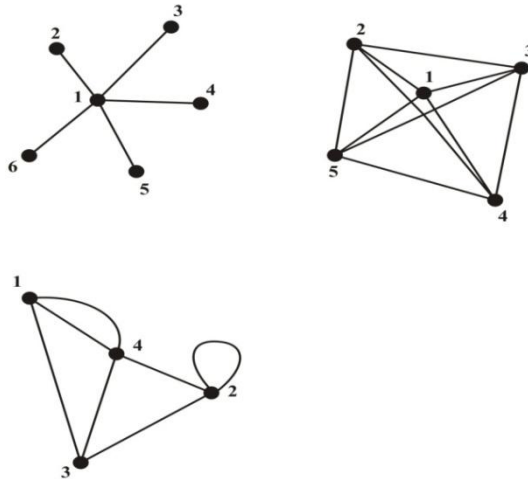
1.3. Przykłady układów chaotycznych

1.3a. Grafy klasyczne i grafy kwantowe

Kottos i Smilansky pokazali, że doskonałymi przykładami kwantowych układów chaotycznych są grafy kwantowe [27; 28; 29]. Grafy składają się z V wierzchołków połączonych za pomocą B ramion. W przypadku grafów całkowicie połączonych $B = \frac{V(V-1)}{2}$. Ramię łączące dwa wierzchołki i -ty oraz j -ty, oznaczone jako $b_{i,j}$ ($i = 1, \dots, V, j = 1, \dots, V$), ma długość $L_{i,j}$.

Graf może być rozpatrywany jako idealizacja rzeczywistych sieci fizycznych, w których spełniony jest warunek, że rozmiary poprzeczne ich ramion są znacznie mniejsze niż ich długości. Topologia grafu może być bardzo różna (Rys.1.3a.1) i jest określona za pomocą tzw. macierzy połączeń wierzchołków $C_{i,j}$.

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i, j \text{ są połączone} \\ 0, & \text{jeśli nie są połączone} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, V. \quad (1.3a.1)$$



Rys.1.3a.1

Przykłady różnych topologii grafów kwantowych: kształt gwiazdy, graf całkowicie połączony, graf o bardziej zróżnicowanej strukturze.

W grafach opisywanych klasycznie chaos spowodowany jest tym, że cząstka poruszająca się po ramieniu $b_{i,j}$, z wierzchołka i dochodząc do wierzchołka j , musi „dokonać wyboru”, na które z przyłączonych do tego wierzchołka ramion przejdzie. Wybór ramienia nie jest determinowany czynnikami zewnętrznymi. Prawdopodobieństwo przejścia cząstki z ramienia $b_{i,j}$ do ramienia $b_{j,k}$ wynosi [27]:

$$P_{ij \rightarrow jk} = \left| \frac{2}{v_j} - \delta_{j,k} \right|^2, \quad (1.3a.2)$$

gdzie v_j jest liczbą ramion przyłączonych do wierzchołka j .

Koncepcja grafów kwantowych została po raz pierwszy zastosowana przez Paulinga do modelowania cząsteczek organicznych za pomocą swobodnych elektronów [30]. W następnych latach grafy kwantowe znalazły zastosowanie w badaniach takich obiektów, jak: druty kwantowe [31; 32], falowody optyczne [33; 34], układy mezoskopowe [35; 36] i struktury fraktali [37; 38].

Ruch cząstki o masie m na ramieniu $b_{i,j}$ grafu kwantowego opisywany jest za pomocą równania Schrödingera (przyjęto jednostki $\hbar = 2m = 1$) [27]:

$$\left(-i \frac{d}{dx} - A_{i,j} \right)^2 \Psi_{i,j}(x) = k^2 \Psi_{i,j}(x), \quad (1.3a.3)$$

gdzie $A_{i,j}$ jest tzw. magnetycznym potencjałem wektorowym, odpowiedzialnym za złamanie symetrii układu względem odwrócenia czasu ($Re(A_{i,j}) \neq 0$, $A_{i,j} = -A_{j,i}$).

Funkcja falowa $\Psi_{i,j}(x)$ z równania 1.3a.3 musi spełniać odpowiednie warunki brzegowe na wierzchołkach grafu:

- warunek ciągłości funkcji falowej:

$$\Psi_{i,j}(x) \Big|_{x=0} = \varphi_i, \quad \Psi_{i,j}(x) \Big|_{x=L_{i,j}} = \varphi_j \quad \text{dla } i < j \text{ oraz } C_{i,j} \neq 0, \quad (1.3a.4)$$

- warunek zachowania prądu prawdopodobieństwa:

$$\sum_{j < i} C_{i,j} \left(iA_{j,i} - \frac{d}{dx} \right) \Psi_{i,j}(x) \Big|_{x=L_{i,j}} + \sum_{j > i} C_{i,j} \left(-iA_{i,j} - \frac{d}{dx} \right) \Psi_{i,j}(x) \Big|_{x=0} = \lambda_i \varphi_i. \quad (1.3a.5)$$

Parametr λ_i determinuje warunki brzegowe. Jeśli przyjmiemy, że $\lambda_i = \infty$ dla każdego z wierzchołków, to mówimy o warunkach brzegowych Dirichleta. W takim przypadku ramiona grafu nie są połączone. W przypadku warunków brzegowych Dirichleta funkcje falowe $\Psi_{i,j}$ mają prostą postać [27]:

$$\Psi_{i,j}(x) = \frac{e^{iA_{i,j}x}}{\sqrt{L_{i,j}}} \sin\left(k_{i,j}^{(i,j)} \pi x\right), \quad k_{i,j}^{(i,j)} = \frac{n_{i,j}\pi}{L_{i,j}}, \quad n_{i,j} > 0. \quad (1.3a.6)$$

Jeśli $\lambda_i = 0$ dla każdego z wierzchołków, to ramiona grafu są połączone, a funkcje falowe przybierają postać:

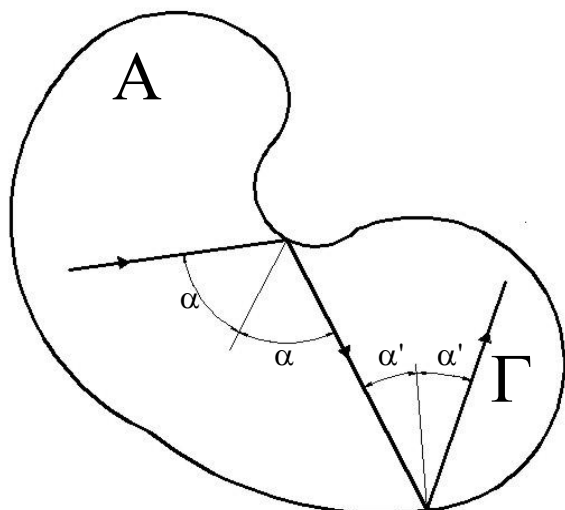
$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}(x) = & \frac{e^{iA_{i,j}x}}{\sin(kL_{i,j})} C_{i,j} \left(\varphi_i \sin\left(k(L_{i,j} - x)\right) + \right. \\ & \left. + \varphi_j e^{-iA_{i,j}L_{i,j}} \sin(kx) \right) \quad i < j. \end{aligned} \quad (1.3a.7)$$

Mówimy wtedy o warunkach brzegowych von Neumanna.

Zjawisko absorpcji w grafach zostanie omówione w rozdziale 2.1.

1.3b. Bilardy klasyczne i bilardy kwantowe

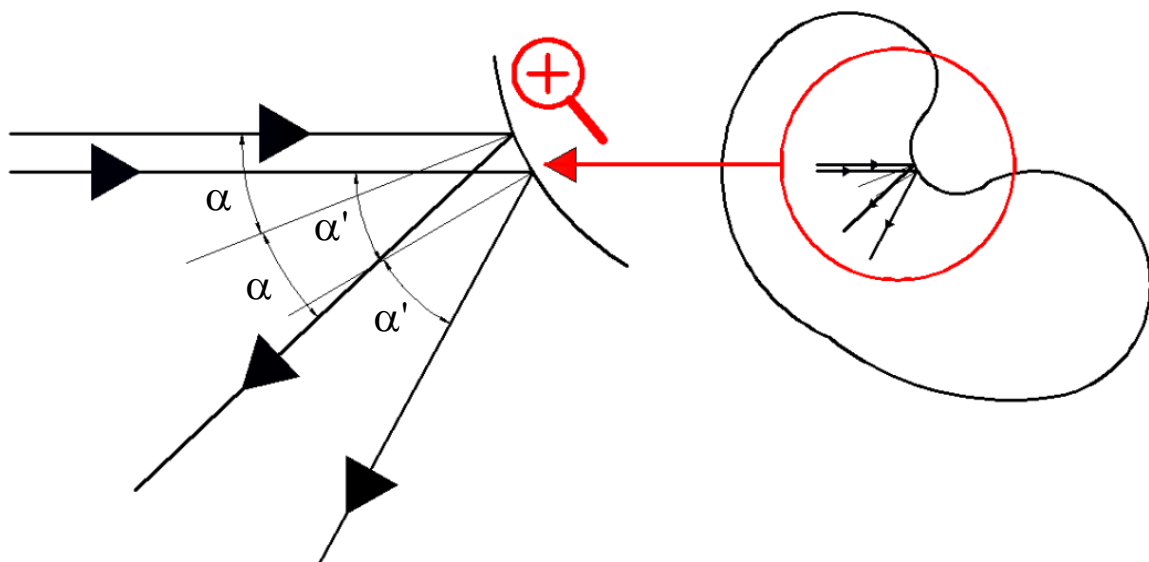
Kolejnym przykładem układów chaotycznych są bilardy. Bilard jest układem dwuwymiarowym (Rys. 1.3b.1), tworzonym przez powierzchnię A zamkniętą przez krzywą Γ . Wewnątrz bilardu porusza się cząstka o masie m , doznając całkowicie elastycznych zderzeń z granicą Γ . Ponieważ zderzenia są elastyczne, a cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym bez tarcia, energia układu jest zachowana.



Rys. 1.3b.1

Schemat bilardu klasycznego, wewnątrz którego porusza się cząstka o masie m , doznając elastycznych zderzeń z granicą Γ . Energia cząstki jest zachowana.

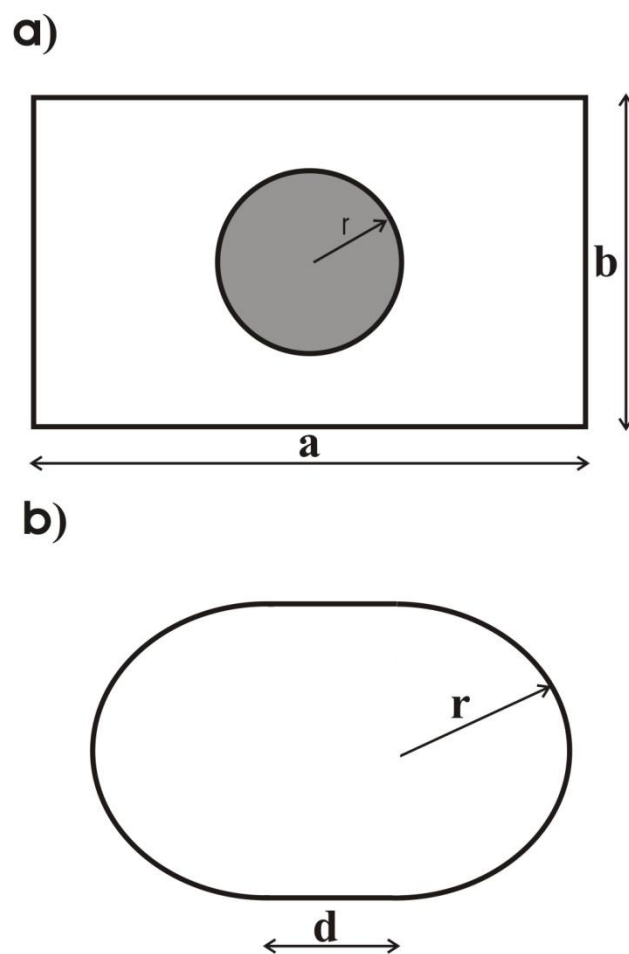
Na rysunku 1.3b.2 pokazano mechanizm wykładniczego rozbiegania się początkowo blisko leżących względem siebie trajektorii. Wykładnik Lyapunowa w bilardach chaotycznych jest większy od zera, a kształt bilardu decyduje o stopniu jego chaotyczności.



Rys. 1.3b.2

Rozbieganie się dwóch początkowo blisko leżących względem siebie trajektorii w bilardzie klasycznym.

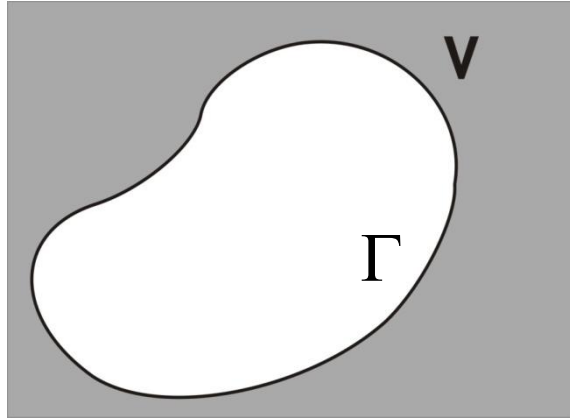
Przykładami często badanych bilardów chaotycznych są bilardy Sinaia [39; 40] oraz tzw. stadiony Bunimovicha [41; 42; 43; 44] (Rys. 1.3b.3 a i b odpowiednio).



Rys. 1.3b.3

- a) Bilard Sinaia – bilard w kształcie prostokąta o bokach długości a i b , w środku którego znajduje się okrągły wkład rozpraszający o promieniu r .
- b) Bilard Bunimovicha – bilard w kształcie boiska hokejowego, złożony z dwóch półkul o promieniu r , rozdzielonych prostokątem o bokach d i $2r$.

Analogicznie do bilardu klasycznego, bilardem kwantowym nazywamy dwuwymiarowy układ, w którym swobodna cząstka porusza się w nieskończonej studni potencjału (Rys. 1.3b.4). Dynamika tej cząstki opisywana jest równaniem Schrödingera (przyjęto jednostki $\hbar = 2m = 1$), spełniającym odpowiednie warunki brzegowe:



Rys. 1.3b.4

Schemat bilardu kwantowego.

$$\Delta\Psi(q) + E\Psi(q) = 0. \quad (1.3b.1)$$

Dla warunków brzegowych Dirichleta funkcja $\Psi(q)$ spełnia równość:

$$\Psi(q)|_{\Gamma} = 0, \quad (1.3b.2)$$

a dla warunków brzegowych von Neumanna:

$$\left. \frac{\partial\Psi(q)}{\partial\vec{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (1.3b.3)$$

gdzie \vec{n} jest wektorem jednostkowym prostopadłym do granicy Γ .

McDonald i Kaufmann [45] pokazali, że rozkład odległości między sąsiednimi poziomami energetycznymi kwantowego bilardu o kształcie ćwiartki stadionu Bunimovicha jest bardzo zbliżony do rozkładu danego wyrażeniem 1.2.6. Bilard ten reprezentuje więc układ chaotyczny typu GOE.

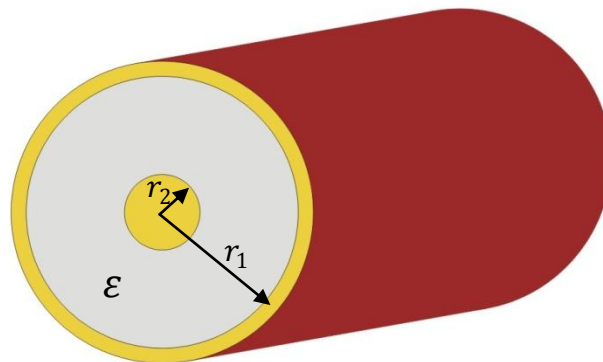
Natomiast rozkład NNSD dla bilardu regularnego w kształcie koła ma postać rozkładu Poissona [13] potwierdzając tym samym, że układ ten jest niechaotyczny.

2. Doświadczalna symulacja kwantowych układów chaotycznych

2.1. Doświadczalna symulacja grafów kwantowych

Do doświadczalnych symulacji grafów kwantowych użyto grafów mikrofalowych. Są to sieci mikrofalowe, składające się z koncentrycznych przewodów mikrofalowych połączonych za pomocą specjalnych złączy. Przewody mikrofalowe są odpowiednikami ramion, a złącza wierzchołków grafu kwantowego.

Przekrój poprzeczny mikrofalowego przewodu typu SMA (*ang.* SubMiniature version A) pokazano na rysunku 2.1.1. Jest to falowód składający się z dwóch współśrodkowych koncentrycznych przewodników: zewnętrznego o promieniu r_1 oraz wewnętrznego o promieniu r_2 . Pomiędzy nimi znajduje się dielektryk o stałej dielektrycznej ϵ .



Rys. 2.1.1

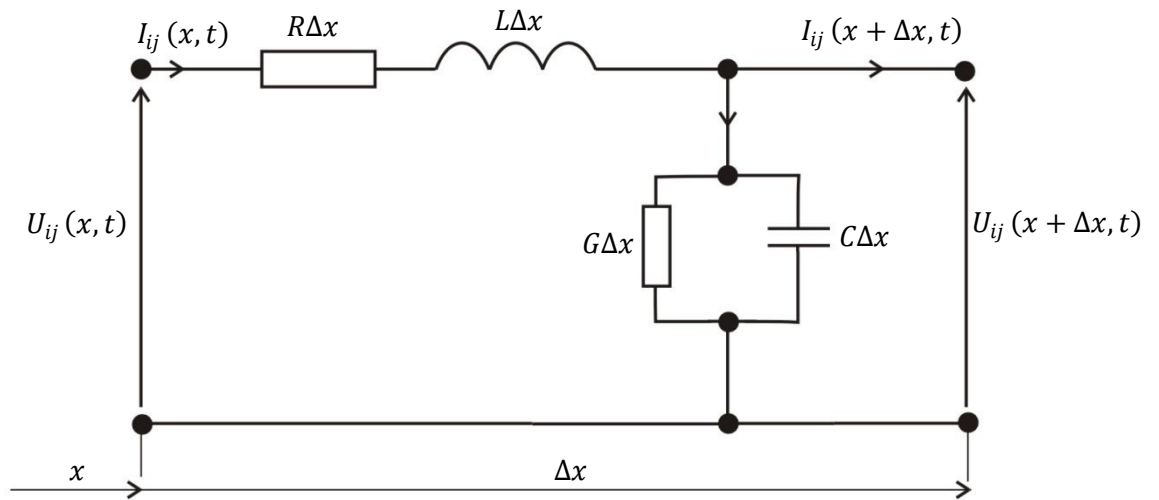
Przekrój poprzeczny mikrofalowego przewodu SMA. Przewód składa się z dwóch współśrodkowych koncentrycznych przewodników o promieniach r_1 i r_2 , pomiędzy którymi znajduje się dielektryk o stałej dielektrycznej ϵ .

Jeżeli w falowodzie rozchodzi się fala o częstotliwości poniżej tzw. częstotliwości odcięcia (*ang.* cut-off frequency) ν_c , to znajduje się ona jedynie w modzie podstawowym TEM (*ang.* Transverse Electric and Magnetic Mode), zwanym też modem Lechera. Częstotliwość odcięcia zdefiniowana jest wzorem [46]:

$$v_c \approx \frac{c}{\pi(r_1+r_2)\sqrt{\epsilon}} \quad (2.1.1)$$

Topologię grafu mikrofalowego, podobnie jak kwantowego, określają wartości elementów macierzy połączeń wierzchołków $C_{i,j}$. Gdy wierzchołki i oraz j są połączone, wartość ta jest równa 1. Gdy wierzchołki nie są połączone, wartość ta wynosi 0. Wierzchołki są wieloramiennymi złączami mikrofalowymi, których ramiona są w pełni równoważne względem siebie.

Fragmencie Δx falowodu mikrofalowego łączącego wierzchołek i z j można przedstawić za pomocą elektrycznego schematu zastępczego, przedstawionego na rysunku 2.1.2 [47]. Napięcie elektryczne pomiędzy przewodnikami falowodu wynosi $U_{ij}(x, t)$.



Rys. 2.1.2

Schemat zastępczy fragmentu falowodu mikrofalowego o długości Δx , łączącego wierzchołek i z j .

Stosując pierwsze prawo Kirchoffa dla prądów płynących w obwodzie, otrzymujemy:

$$I_{ij}(x, t) = GU_{ij}(x + \Delta x, t)\Delta x + C \frac{\partial U_{ij}(x + \Delta x, t)}{\partial t} \Delta x + I_{ij}(x + \Delta x, t). \quad (2.1.2)$$

Z drugiego prawa Kirchoffa wynika natomiast:

$$U_{ij}(x, t) = RI_{ij}(x, t)\Delta x + L \frac{\partial I_{ij}(x, t)}{\partial t} \Delta x + U_{ij}(x + \Delta x, t). \quad (2.1.3)$$

W powyższych wyrażeniach, wielkości G, C, R, L oznaczają odpowiednio upływność, pojemność, rezystancję i indukcyjność elektryczną przypadającą na jednostkę długości.

Zmiana $I_{ij}(x, t)$ i $U_{ij}(x, t)$ na odcinku Δx wynosi zatem:

$$\frac{I_{ij}(x+\Delta x, t) - I_{ij}(x, t)}{\Delta x} = -GU_{ij}(x + \Delta x, t) - C \frac{\partial U_{ij}(x+\Delta x, t)}{\partial t}, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{U_{ij}(x+\Delta x, t) - U_{ij}(x, t)}{\Delta x} = -RI_{ij}(x, t) - L \frac{\partial I_{ij}(x, t)}{\partial t}. \quad (2.1.5)$$

Przechodząc do granicy z $\Delta x \rightarrow 0$, równania 2.1.4-5 możemy przepisać jako:

$$-\frac{\partial I_{ij}(x, t)}{\partial x} = GU_{ij}(x, t) + C \frac{\partial U_{ij}(x, t)}{\partial t}, \quad (2.1.6)$$

$$-\frac{\partial U_{ij}(x, t)}{\partial x} = RI_{ij}(x, t) + L \frac{\partial I_{ij}(x, t)}{\partial t}. \quad (2.1.7)$$

Z równań 2.1.6 i 2.1.7 uzyskujemy równanie telegrafistów:

$$LC \frac{\partial^2 U_{ij}(x, t)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial U_{ij}(x, t)}{\partial t} + RGU_{ij}(x, t) - \frac{\partial^2 U_{ij}(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1.8)$$

W przypadku bezstratnego lub mało stratnego falowodu ($R \cong G \cong 0$), równanie 2.1.8 redukuje się do:

$$LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1.9)$$

Ponieważ prędkość fali, rozchodzącej się w falowodzie z dielektrykiem o stałej dielektrycznej ε , wynosi $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, możemy równanie 2.1.9 przekształcić do postaci:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 U_{ij}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_{ij}(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1.10)$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni.

Ponadto, jeśli rozchodząca się fala jest falą monochromatyczną $U_{ij}(x,t) = U_{ij}(x)e^{i\omega t}$, równanie telegrafistów 2.1.10 przyjmuje postać:

$$\frac{d^2}{dx^2} U_{ij}(x) + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} U_{ij}(x) = 0. \quad (2.1.11)$$

Na każdym z wierzchołków sieci mikrofalowej spełniony jest warunek ciągłości różnicy potencjałów:

$$U_{ij}(x)|_{x=0} = \varphi_i, \quad U_{ij}(x)|_{x=L_{ij}} = \varphi_j, \quad i < j, \quad C_{ij} \neq 0, \quad (2.1.12)$$

oraz zachowany jest warunek ciągłości prądu (pierwsze prawo Kirchoffa):

$$\sum_{j < i} C_{ij} J_{ji}(x)|_{x=L_{ij}} - \sum_{j > i} C_{ij} J_{ij}(x)|_{x=0} = 0. \quad (2.1.13)$$

Jak widać, równanie telegrafistów 2.1.11 jest analogiczne do jednowymiarowego równania Schrödingera 1.3a.3, opisującego graf kwantowy z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu, z warunkami brzegowymi von Neumanna. Rolę funkcji falowej odgrywa różnica potencjałów pomiędzy przewodnikami falowodu $\Psi_{ij}(x) \Leftrightarrow U_{ij}(x)$, a kwadratowi wektora falowego k^2 odpowiada $\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \left(k^2 \Leftrightarrow \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right)$.

Absorpcja występująca w ramionach grafu kwantowego lub mikrofalowego (absorpcja w przewodach mikrofalowych), może być uwzględniona poprzez wprowadzenie do wzoru 1.3a.7 zespolonego wektora falowego [48]:

$$k' = k + i\Gamma' \sqrt{k}, \quad (2.1.14)$$

gdzie Γ' jest współczynnikiem absorpcji występującej w grafie.

W celu zwiększenia tłumienia w sieciach mikrofalowych można dodatkowo zastosować atenuatory mikrofalowe. W szczególności, w doświadczeniach użyto szerokopasmowych atenuatorów o tłumieniu 1 dB oraz 2 dB.

Wprowadzenie do opisu grafu kwantowego tzw. potencjału optycznego $U_{i,j}(x)$ [49] umożliwia uwzględnienie absorpcji, wynikającej z obecności atenuatorów na ramionach grafu mikrofalowego. Jeśli więc, atenuator znajduje się na ramieniu łączącym wierzchołek i z j , operator energii może być przedstawiony w postaci [49; 50; 51]:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_{i,j}(x). \quad (2.1.15)$$

W pracy [51] wykazano, że potencjał $U_{i,j}(x)$ może być przedstawiony za pomocą formuły:

$$U_{i,j}(x) = ib \sum_{r=1}^N \delta\left(\frac{x-(r-1)l_b}{(N-1)}\right). \quad (2.1.16)$$

W powyższym wyrażeniu δ jest deltą Diraca, a l_b długością symulowanego atenuatora. Dobierając odpowiednio parametry N oraz b , można symulować atenuatory o żądanej sile tłumienia.

Sieci mikrofalowe, symulujące grafy kwantowe ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu, można skonstruować używając pasywnych urządzeń zwanych cyrkulatorami [51] lub za pomocą izolatorów Faraday'a [48]. Tak więc, przy użyciu odpowiednio skonstruowanych sieci mikrofalowych możemy symulować otwarte grafy kwantowe o kontrolowanej absorpcji, w których jest zachowana lub złamana symetria względem odwrócenia czasu.

2.2. Doświadczalna symulacja bilardów kwantowych

W 1990 roku Stöckmann i Stein [52] potwierdzili doświadczalnie, że bilardy kwantowe można symulować za pomocą mikrofalowych wnęk rezonansowych. Jest to możliwe dzięki analogii między równaniem Helmholtza, opisującym rozkład pola elektromagnetycznego w rezonatorze, a równaniem Schrödingera, opisującym ruch cząstki w dwuwymiarowej studni potencjału. Dla wnęki rezonansowej równania Helmholtza możemy zapisać w postaci:

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$(\Delta + k^2)\vec{B} = 0, \quad (2.2.2)$$

gdzie \vec{E} i \vec{B} oznaczają odpowiednio pole elektryczne i magnetyczne, $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ jest wartością wektora falowego, c prędkością światła w próżni, a ν częstotliwością fali elektromagnetycznej.

Pola \vec{E} i \vec{B} spełniają następujące warunki brzegowe na ściankach rezonatora:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad (2.2.3)$$

oraz

$$\vec{n}\vec{B} = 0, \quad (2.2.4)$$

gdzie \vec{n} jest jednostkowym wektorem prostopadłym do powierzchni ścianek rezonatora. Jeśli rezonator ma postać cylindra o osi równoległej do osi Z , warunki 2.2.3-4 spełniają mody poprzeczne magnetyczne (TM) oraz mody poprzeczne elektryczne (TE). Poprzeczne mody magnetyczne mają wtedy postać:

$$\vec{E}_z(x, y, z) = \vec{E}_z(x, y)\cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.5)$$

$$\vec{B}_z(x, y, z) = 0, \quad (2.2.6)$$

gdzie d jest wysokością wnęki (wzdłuż osi Z), a $\vec{E}(x, y)$ spełnia dwuwymiarowe równanie Helmholtza:

$$\left[\Delta + k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right] \vec{E}_z(x, y) = 0, \quad (2.2.7)$$

z warunkami brzegowymi Dirichleta:

$$\vec{E}_z(x, y)|_S = 0. \quad (2.2.8)$$

Analogicznie, elektryczne mody poprzeczne mają postać:

$$\vec{B}_z(x, y, z) = \vec{B}_z(x, y) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.9)$$

$$\vec{E}_z(x, y, z) = 0, \quad (2.2.10)$$

gdzie $B(x, y, z)$ spełnia dwuwymiarowe równanie Helmholtza:

$$\left[\Delta + k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right] \vec{B}_z(x, y) = 0, \quad (2.2.11)$$

z warunkami brzegowymi von Neumanna:

$$\nabla_{\perp} \vec{B}_z(x, y)|_S = 0. \quad (2.2.12)$$

Dla częstotliwości mniejszej od tzw. częstotliwości odcięcia $\nu_c \leq \frac{c}{2d}$, w rezonatorze powstają jedynie dwuwymiarowe (propagujące się w płaszczyźnie XY) poprzeczne mody magnetyczne z $n = 0$:

$$(\Delta + k^2) \vec{E}_z(x, y) = 0, \quad (2.2.13)$$

a warunki brzegowe pozostają bez zmian $\vec{E}_z(x, y)|_S = 0$.

Jeśli przyjmiemy, że $\vec{E}_z(x, y) \Leftrightarrow \Psi(q)$, oraz $k^2 \Leftrightarrow E$, to równanie 2.2.13 staje się równaniem analogicznym do równania Schrödingera 1.3b.1 z warunkami brzegowymi Dirichleta 1.3b.2. Oznacza to, że równania te są formalnie identyczne przy założeniu, że funkcjom i energiom własnym bilardu kwantowego odpowiadają odpowiednio: amplituda fali elektromagnetycznej oraz kwadrat jej wektora falowego.

Z zupełnie inną sytuacją mamy do czynienia w przypadku trójwymiarowych rezonansowych wnęk mikrofalowych, dla których nie ma odpowiedników wśród układów kwantowych. Wynika to z faktu, że pole elektromagnetyczne wewnątrz trójwymiarowej wnęki nie może być opisane za pomocą funkcji skalarnej, takiej jak funkcja falowa w równaniu Schrödingera. To z kolei powoduje, że równanie Schrödingera przestaje być odpowiednikiem trójwymiarowego równania Helmholtza [10]. Próbę teoretycznego zmierzenia się z tym problemem podjęto w pracach [44; 53; 54]. Pojawiło się także kilka prac związanych z eksperymentalnym badaniem tych obiektów [55; 56; 57; 58]. W pracach [55; 58] pokazano, że wyniki uzyskane dla trójwymiarowych wnęk rezonansowych, jak na przykład NNSD, czy też zachowanie orbit periodycznych są bardzo zbliżone do rezultatów przewidzianych dla trójwymiarowych układów kwantowych. Dlatego też postanowiłem przeprowadzić doświadczenia także z trójwymiarowymi wnękami mikrofalowymi.

We wnękach, tak jak praktycznie we wszystkich rzeczywistych układach fizycznych, mamy do czynienia ze stratami energii. Straty w rezonatorze można scharakteryzować za pomocą parametru zwanego dobrocią:

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu}, \quad (2.2.14)$$

gdzie ν jest częstotliwością rezonansu, a $\Delta\nu$ jego szerokością.

W obecności strat związanych z wnikaniem fali w głąb ścianek rezonatora, dobroć rezonatora Q można zapisać w postaci:

$$Q = \varsigma \frac{V}{S\delta}, \quad (2.2.15)$$

gdzie współczynnik ζ związany jest z geometrią rezonatora, V i S są odpowiednio jego objętością i powierzchnią, a δ jest głębokością wnikania fali o częstotliwości $\omega = 2\pi\nu$ i wynosi:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}, \quad (2.2.16)$$

gdzie σ jest przewodnością elektryczną ścianek, a μ_0 przewodnością magnetyczną próżni.

2.3. Układ doświadczalny

2.3a. Sieci mikrofalowe

Sieci mikrofalowe symulujące grafy kwantowe z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu, w przypadku pomiaru sygnału odbitego (pomiary jednoportowy) składały się z piętnastu przewodów SMA (ramiona sieci), jednego złącza (wierzchołka) sześcioramiennego i pięciu złączy pięcioramiennych. W przypadku gdy oprócz sygnałów odbitych prowadzono pomiary sygnałów przechodzących przez układ (pomiary dwuportowy), sieci składały się z piętnastu przewodów SMA, dwóch złączy sześcioramiennych oraz czterech złączy czteroramiennych. Sieci symulujące grafy kwantowe ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu zawierały, oprócz przewodów i złączy, także cyrkulatory (Rys. 2.3.1). Długości poszczególnych ramion zostały dobrane tak, by żadna z nich nie była całkowitą wielokrotnością długości innego ramienia.

Przekrój przewodu SMA pokazano na rysunku 2.1.1. W doświadczeniach użyto przewodów HUBER + SUHNER Sucoform 141. Koncentryczne przewodniki były wykonane ze stopu srebra i miedzi, a przestrzeń pomiędzy nimi była wypełniona teflonem, materiałem dielektrycznym o stałej dielektrycznej $\varepsilon = 2.06$ [59]. Promień przewodnika zewnętrznego wynosił $r_1 = 1.78 \text{ mm}$, a przewodnika wewnętrznego $r_2 = 0.475 \text{ mm}$. Aby połączyć przewody mikrofalowe ze złączami stanowiącymi wierzchołki sieci, na końce przewodów wlutowano specjalne złącza (końcówki) mikrofalowe RG402 (Rys. 2.3a.1).

Absorpcja przewodów zależy od częstotliwości ν rozchodzącej się fali w następujący sposób:

$$A(\nu) = a\sqrt{\nu} + b\nu, \quad (2.3a.1)$$

gdzie $a = 0.3631 \frac{\text{dB}}{\text{m}\sqrt{\text{GHz}}}$, $b = 0.0377 \frac{\text{dB}}{\text{mGHz}}$ [59].

Prędkość w rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w przewodzie mikrofalowym o stałej dielektrycznej ε wynosi:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (2.3a.2)$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni.

W optyce obecność dielektryka uwzględnia się często poprzez wprowadzenie tzw. długości optycznej l_o :

$$l_o = \sqrt{\epsilon}l. \quad (2.3a.3)$$

gdzie l jest rzeczywistą (fizyczną) długością przewodu.

Podawane w dalszej części pracy długości ramion sieci mikrofalowych oraz ich sumy są właśnie długościami optycznymi.

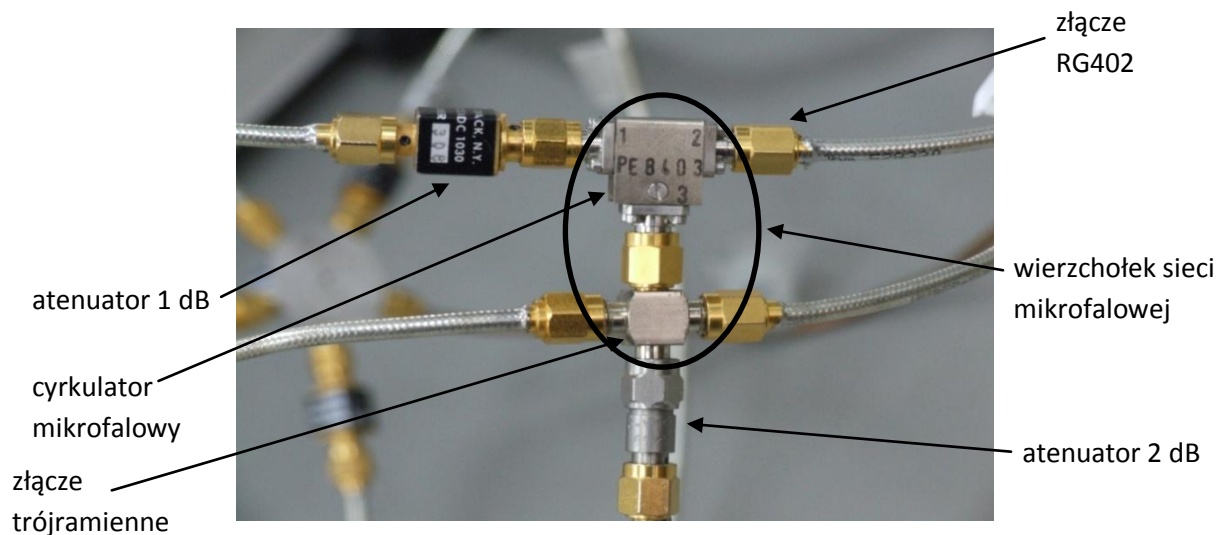
Złącza pełniące rolę wierzchołków sieci mikrofalowych, które posiadały więcej niż trzy ramiona zostały wykonane we własnym zakresie, w naszym laboratorium. W tym celu wykorzystano między innymi fabrycznie dostępne złącza trójramienne (Rys. 2.3a.1).

Uzyskanie statystycznie wiarygodnych wyników badanych wielkości wymagało dokonania pomiarów kilkudziesięciu różnych realizacji sieci. Realizacje te, różniące się na ogół długością, otrzymano dzięki wymianie ramion lub innych elementów sieci. Wymagało to wielokrotnego rozkręcania i skręcania sieci, co prowadziło do częstych uszkodzeń wierzchołków i końcówek przewodów mikrofalowych. W związku z powyższym, doświadczalne badania sieci mikrofalowych, choć w samym zamyśle proste, są w praktyce bardzo pracochłonne.

Dołączenie do sieci atenuatorów umożliwia efektywną i kontrolowaną zmianę jej absorpcji. W doświadczeniach przeprowadzonych w ramach niniejszej pracy użyto atenuatorów o tłumieniu 1 dB oraz 2 dB typu MDC 1030, firmy MIDISCO Commack. Długości fizyczne atenuatorów 1 dB wynosiły 3 cm , natomiast atenuatorów 2 dB – 2.1 cm (Rys. 2.3a.1).

W celu otrzymania sieci mikrofalowych symulujących grafy kwantowe ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu, użyto pasywnych urządzeń zwanych cyrkulatorami. W doświadczeniach opisanych w niniejszej pracy użyto cyrkulatorów mikrofalowych firmy Anritsu PE8403 (Rys. 2.3a.1), charakteryzujących się małą absorpcją, wynoszącą 0.4 dB . Cyrkulator jest urządzeniem trzyportowym, które działa w następujący sposób: fala wchodząca do portu pierwszego wychodzi

z portu drugiego, fala wchodząca do portu drugiego wychodzi z portu trzeciego, a fala wchodząca do portu trzeciego wychodzi portem pierwszym. Użycie cyrkulatorów powoduje, że sygnał wychodzący z ramienia wierzchołka, do którego dołączony jest cyrkulator, kieruje się tylko do określonego ramienia sieci. Na przykład, jeżeli do danego ramienia wierzchołka dołączony jest port pierwszy cyrkulatora, to sygnał wychodzący z tego ramienia wierzchołka dotrze tylko do ramienia sieci, które jest dołączone do drugiego portu cyrkulatora. Z kolei, do tego samego ramienia wierzchołka może dotrzeć tylko sygnał z ramienia sieci, które jest dołączone do trzeciego portu cyrkulatora. W takim przypadku mówimy o sieciach mikrofalowych z ramionami skierowanymi.

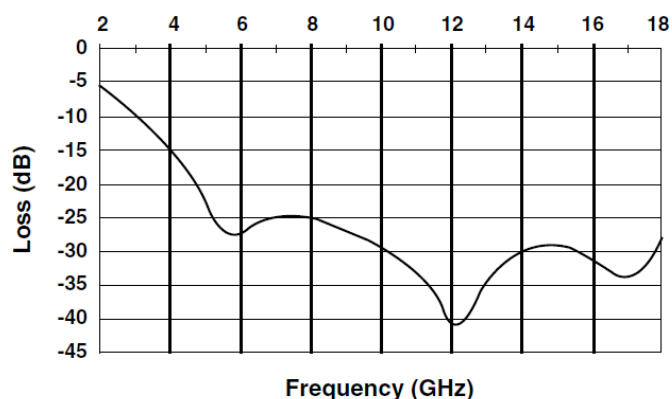


Rys. 2.3a.1

Zdjęcie cyrkulatora mikrofalowego, dołączonego do wierzchołka sieci mikrofalowej. Na zdjęciu widać także atenuatory 1 dB i 2 dB używane do zwiększenia wartości absorpcji w sieci.

2.3b. Trójwymiarowa wnęka mikrofalowa

Trójwymiarową wnękę rezonansową, w kształcie połowy walca kołowego, wykonano z polialuminium typu EN5754, o gęstości 2.67 g/cm^3 . Do wnętrza wnęki wprowadzono absorber typu RFRET 4009 firmy LairdTech (Rys. 3.2b.1c). Zależność tłumienia od częstotliwości rozchodzącej się fali dla tego absorbera przedstawiono na rysunku 2.3b.1 [60].



Rys. 2.3b.1

Zależność wartości absorpcji od częstotliwości fali elektromagnetycznej dla materiału RFRET 4009, użytego w badaniach trójwymiarowej wnęki rezonansowej.

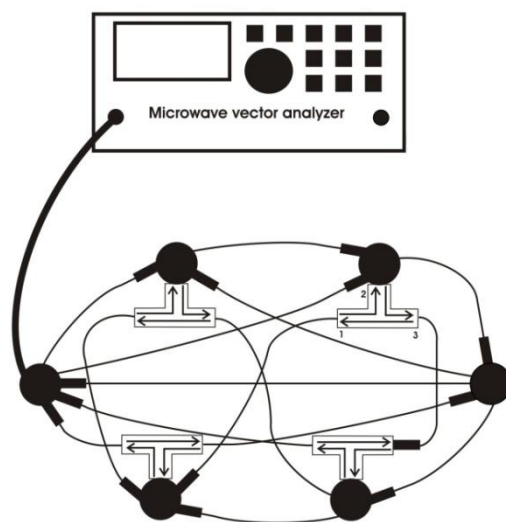
2.3c. Mikrofalowe analizatory wektorowe

Widma badanych obiektów wyznaczono za pomocą wektorowych analizatorów mikrofalowych. Na rysunku 2.3c.1 przedstawiono schemat układu pomiarowego, służącego do pomiaru widma sygnału odbitego od sieci mikrofalowej. Pierwsze pomiary przeprowadzono przy użyciu analizatora Agilent E8720A. Analizator ten jest źródłem sygnału o mocy od -65 dBm do -10 dBm , w przedziale częstotliwości od 130 MHz do 20 GHz i pozwala na wykonanie pomiaru w co najwyżej 801 punktach (800 kroków), z krokiem nie mniejszym niż 100 kHz . Większą część pomiarów wykonano za pomocą analizatora E8364B. Ten nowszy model analizatora generuje sygnał o mocy od -20 dBm do 20 dBm w przedziale częstotliwości od 100 MHz do 50 GHz . Jego użycie pozwala na wykonanie pomiaru w 16001 punktach, z minimalnym krokiem 1 Hz . W naszych badaniach generowano sygnały o mocy -10 dBm w przypadku analizatora E8720A i -17 dBm w przypadku E8364B.

Sieci mikrofalowe podłączano do analizatora za pomocą specjalnych przewodów koncentrycznych HP 85131-60012, w przypadku użycia analizatora E8720A i HP85133-616, HP85133-617 w przypadku analizatora E8364B.

Oba modele analizatorów umożliwiały przeprowadzanie pomiarów jednoportowych i dwuportowych. W pierwszym przypadku mierzono tylko sygnał

odbity od badanego układu, czyli sygnał docierający do portu (wejścia/wyjścia) przyrządu, z którego został wysłany (Rys. 2.3c.1). Z kolei pomiar dwuportowy polegał na równoczesnej rejestracji w jednym porcie sygnału odbitego, a w drugim porcie tej, części sygnału wysłanego z portu pierwszego, która przeszła przez badany układ (Rys. 2.3c.2 i 2.3c.3).



Rys. 2.3c.1

Schemat układu doświadczenia służącego do pomiaru sygnału odbitego od sześciowierzchołkowej sieci mikrofalowej symulującej graf kwantowy ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu (pomiar jednoportowy). Każde ramię sieci zawiera atenuator mikrofalowy, oznaczony na rysunku jako czarny prostokąt. Do skonstruowania sieci z ramionami skierowanymi użyto cyrkulatorów oznaczonych na rysunku jako trójkąty. Strzałki wewnątrz trójkątów pokazują kierunki rozchodzenia się sygnałów w cyrkulatorach.

Wynikiem pomiaru, wykonanego przy użyciu analizatora wektorowego, są wartości macierzy rozpraszania S . W przypadku pomiaru jednoportowego, jednokanałowego sprzężenia badanego układu, macierz S można wyrazić za pomocą współczynnika odbicia:

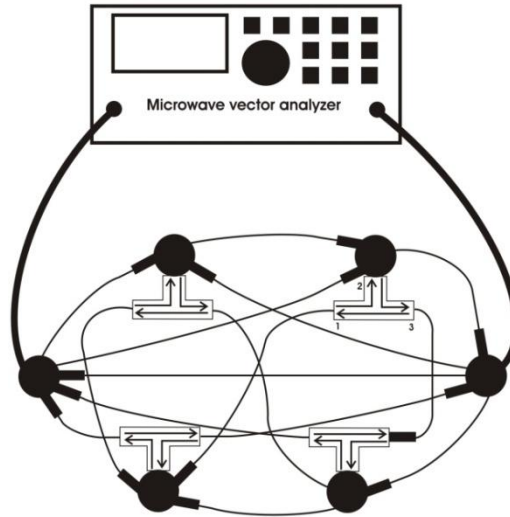
$$S = \sqrt{R}e^{i\theta}, \quad (2.3c.1)$$

gdzie R jest współczynnikiem odbicia, a θ fazą.

W przypadku, w którym badany układ jest sprzężony z aparaturą za pomocą dwóch kanałów (Rys. 2.3c.2), \hat{S} jest macierzą czteroelementową:

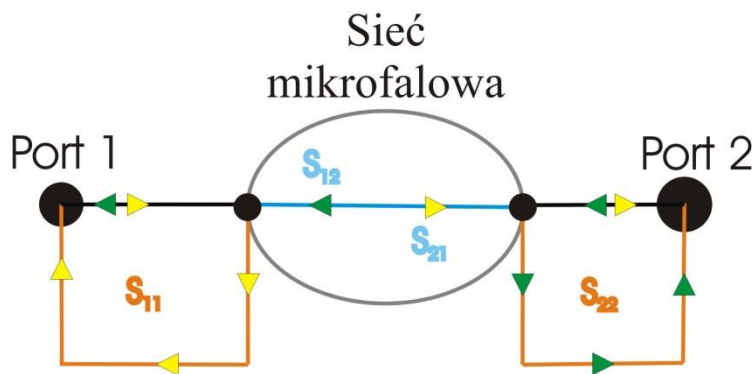
$$\hat{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3c.2)$$

Elementy diagonalne tej macierzy związane są z sygnałami odbitymi od układu, a pozadiagonalne z sygnałami przez niego przechodzącymi. Schematycznie zależności te zostały przedstawione na rysunku 2.3c.3.



Rys. 2.3c.2

Schemat układu doświadczalnego do pomiaru czteroelementowej macierzy rozpraszania \hat{S} (pomiar dwuportowy).



Rys. 2.3c.3

Schematyczne przedstawienie sygnałów i odpowiadających im elementów macierzy rozpraszania \hat{S} w przypadku pomiaru dwuportowego.

3. Doświadczalne badanie statystycznych właściwości widm układów mikrofalowych symulujących chaotyczne układy kwantowe z absorpcją

3.1. Skalowanie energii i doświadczalne wyznaczanie rozkładu najbliższych sąsiadów

Analiza widm energetycznych układów kwantowych w obszarze, w którym są one zbiorami dyskretnymi dostarcza wielu cennych informacji. Z ich pomocą, o czym wspomniano w rozdziale pierwszym, można między innymi stwierdzić czy badany układ jest układem chaotycznym oraz określić jego klasę symetrii (patrz rozdział 1.2).

Analiza taka staje się możliwa po przeskalowaniu energii stanów układów tak, aby średnia gęstość stanów energetycznych była równa jeden. Do przeskalowania energii wykorzystuje się często funkcję stanów energetycznych $N(E)$, zdefiniowaną za pomocą gęstości stanów energetycznych $\varrho(E)$ [14]:

$$N(E) = \int_0^E \varrho(E') dE'. \quad (3.1.1)$$

Funkcja $N(E)$ określa liczbę stanów energii własnych, nie większych od E . Funkcję tę można rozłożyć na dwie części – średnią $\langle N(E) \rangle$ i fluktuującą $N_{fl}(E)$:

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{fl}(E). \quad (3.1.2)$$

Średnią liczbę stanów własnych dla grafów kwantowych można obliczyć korzystając z następującej formuły (przyjęto, że $\hbar = 2m = 1$) [27]:

$$\langle N(E) \rangle = \frac{\sqrt{EL}}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad (3.1.3)$$

gdzie L jest całkowitą długością grafu.

W przypadku bilardów kwantowych można skorzystać z formuły Weyla ($\hbar = 2m = 1$) [61; 62; 63]:

$$\langle N(E) \rangle = \frac{A}{4\pi} E \pm \frac{L}{4\pi} \sqrt{E} + C, \quad (3.1.4)$$

gdzie A oznacza powierzchnię bilardu, L jego obwód. Stała C związana jest z topologią bilardu. Znak plus lub minus w formule zależy odpowiednio od tego, czy bilard spełnia warunki von Neumanna, czy Dirichleta.

Skalowanie energii polega na przejściu $E \rightarrow \xi$:

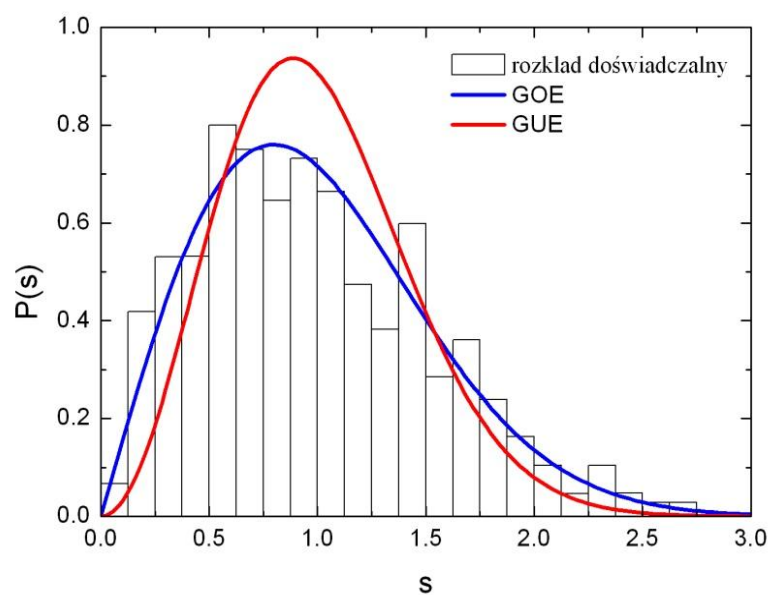
$$\xi_i = \langle N(E_i) \rangle. \quad (3.1.5)$$

Po tej operacji średnia gęstość stanów $\rho(E)$ jest równa jeden.

Jedną z najczęściej wyznaczanych charakterystyk układów chaotycznych, mającą poza nielicznymi przypadkami [20; 21] charakter uniwersalny, jest rozkład odległości między najbliższymi sąsiadami (NNSD). W naszych doświadczeniach rozkład NNSD był wyznaczany dla sześciowierzchołkowych sieci mikrofalowych symulujących grafy kwantowe z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu (GOE, klasa symetrii $\beta = 1$) oraz ze złamaną symetrią (GUE, $\beta = 2$). Wybór sieci sześciowierzchołkowych nie był przypadkowy. Z analizy m.in. funkcji korelacji prędkości poziomów energetycznych dla grafów kwantowych o różnej liczbie wierzchołków, jaką przeprowadził zespół profesora Leszka Sirki w IFPAN wynika, że właśnie dla grafów sześciowierzchołkowych istnieje najlepsza zgodność wyników numerycznych z przewidywaniami teoretycznymi opartymi na teorii macierzy przypadkowych [64].

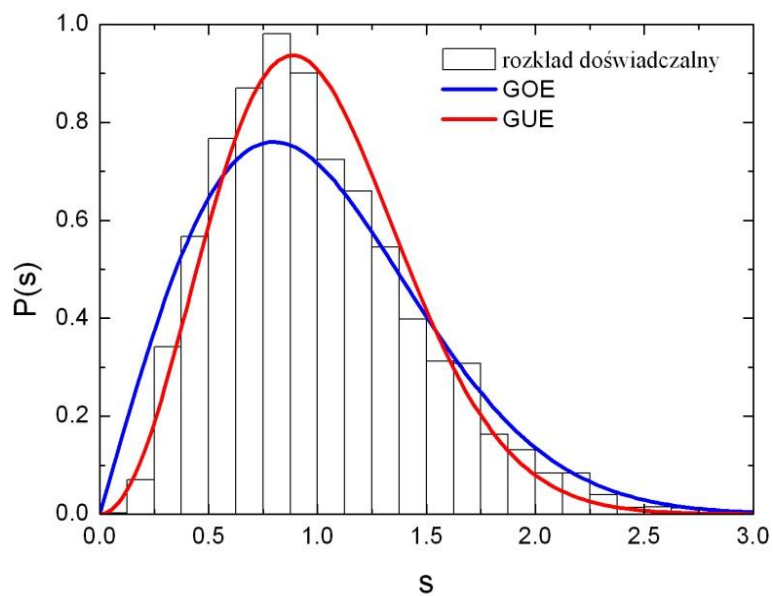
Widma, niezbędne do wyznaczenia NNSD, uzyskano mierząc sygnał odbity od sieci. Otrzymane rezultaty przedstawiono na rysunkach 3.1.1 i 3.1.2, wraz z rozkładami teoretycznymi dla układów GOE i GUE (wz. 1.2.6, 1.2.7).

Rozkład dla sieci z nieskierowanymi ramionami (bez cyrkulatorów) otrzymano z pomiarów sześciu ich realizacji. Zarejestrowano w sumie 846 rezonansów (częstotliwości własnych), w przedziale częstotliwości 0.01 – 6 GHz. Poszczególne konfiguracje różniły się całkowitą długością i konstruowano je wymieniając jedno lub dwa ramiona.



Rys 3.1.1

Doświadczalny rozkład NNSD uzyskany dla sieci niezawierających cyrkulatorów (sieci z ramionami nieskierowanymi).

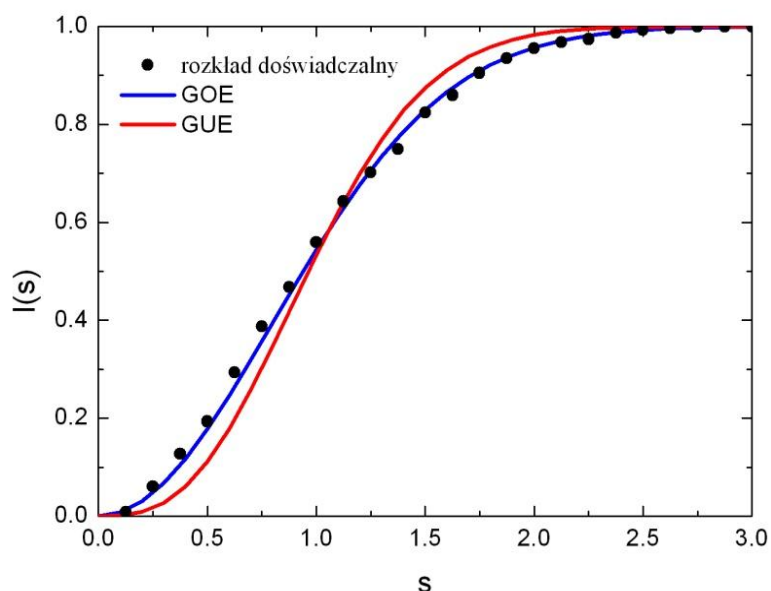


Rys. 3.1.2

Doświadczalny rozkład NNSD uzyskany dla sieci zawierających cyrkulatory (sieci z ramionami skierowanymi).

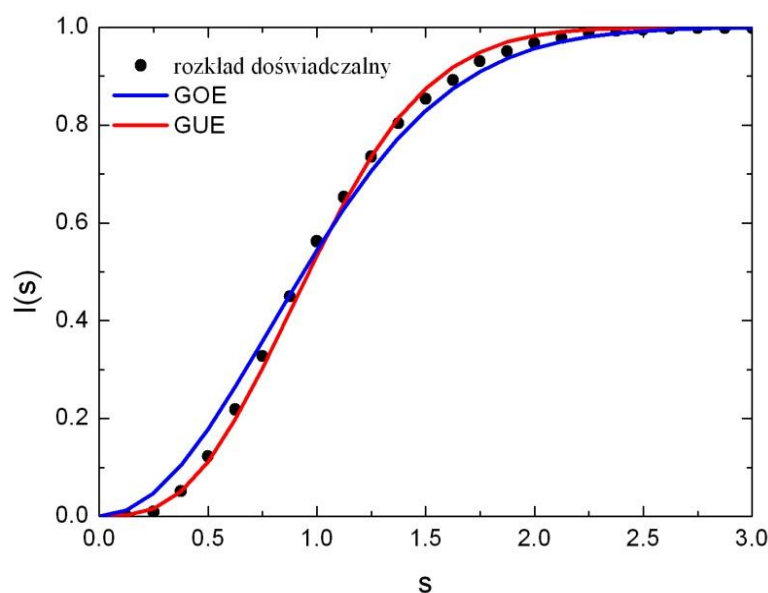
Rozkład NNSD dla mikrofalowych sieci zawierających cyrkulatory, wyznaczono na podstawie pomiarów widma dwudziestu realizacji sieci, które również różniły się między sobą całkowitą długością. Łącznie zarejestrowano 1378 rezonansów w oknie częstotliwościowym 7 – 9 GHz. Niestety, niemożliwe było wykonanie pomiarów dla niższej częstotliwości, gdyż cyrkulatory, którymi dysponowaliśmy, działały w przedziale 7 – 12 GHz. Pomiarów w obszarze niższej częstotliwości są korzystniejsze, gdyż szerokość rezonansów rośnie wraz ze wzrostem częstotliwości i coraz trudniej jest wyznaczać ich położenia.

Kolejne dwa rysunki – 3.1.3, 3.1.4, przedstawiają efekt scałkowania otrzymanych rozkładów, tzw. całkowity rozkład odległości najbliższych sąsiadów (*ang.* INNSD – Integrated Nearest Neighbor Spacing Distribution).



Rys. 3.1.3

Całkowy rozkład NNSD uzyskany dla sieci niezawierających cyrkulatorów (sieci z ramionami nieskierowanymi).



Rys. 3.1.4

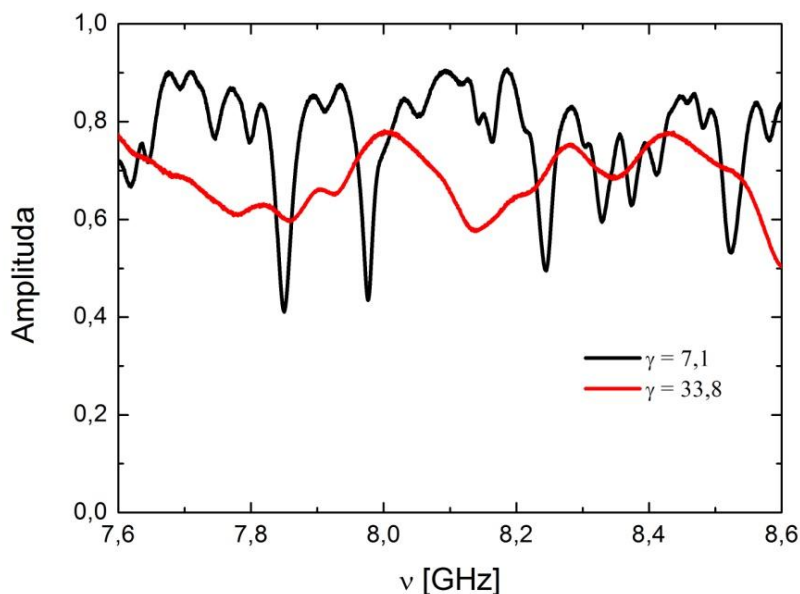
Całkowy rozkład NNSD uzyskany dla sieci zawierających cyrkulatory (sieci z ramionami skierowanymi).

Uzyskane przez nas rezultaty potwierdzają, że sieci mikrofalowe nadają się do symulacji grafów kwantowych. Sieci mikrofalowe z nieskierowanymi ramionami symulują grafy kwantowe z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu. Użycie cyrkulatorów mikrofalowych sprawia, że sieci mikrofalowe symulują grafy o klasie symetrii $\beta = 2$, czyli ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu. Tak więc, sieci te są doskonałym obiektem umożliwiającym przeprowadzanie stosunkowo prostych doświadczeń dotyczących zjawisk chaosu kwantowego w układach o różnych symetriach względem odwrócenia czasu.

Użycie NNSD jako kryterium chaotyczności układu, choć jak widać bardzo naturalne, posiada niestety bardzo poważną wadę. Wraz ze wzrostem absorpcji rezonanse, których położenia wyznaczają wartości własne układu, ulegają poszerzeniu. W przypadku dużej absorpcji znalezienie ich położenia staje się praktycznie niewykonalne (Rys. 3.1.5), co uniemożliwia wyznaczenie rozkładu NNSD.

Wartość absorpcji w układzie określana jest za pomocą bezwymiarowego współczynnika γ . Współczynnik ten, jest zdefiniowany przez średnią szerokość rezonansów Γ i średnią odległość między nimi Δ [65; 66]:

$$\gamma = \frac{2\pi\Gamma}{\Delta}. \quad (3.1.6)$$



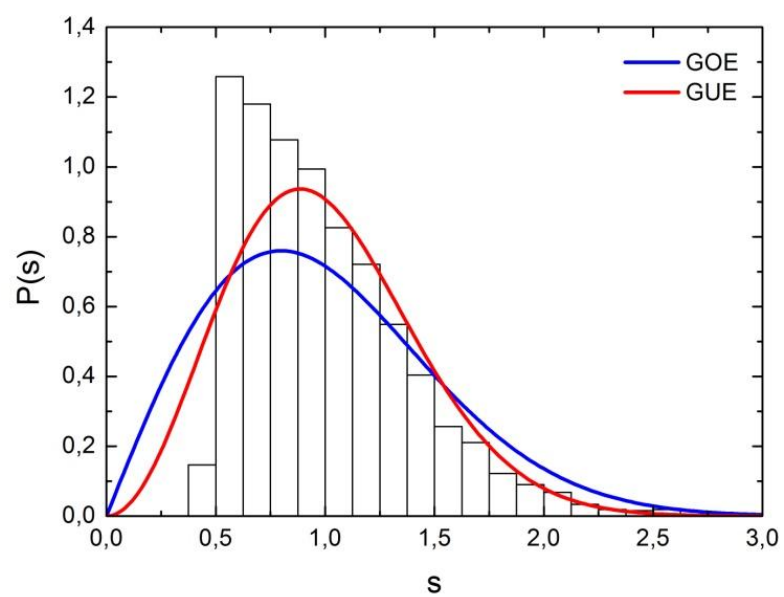
Rys. 3.1.5

Porównanie fragmentów doświadczalnie uzyskanych widm sygnału odbitego dla dwóch realizacji sieci mikrofalowych, różniących się wartością absorpcji.

W ostatnich latach pojawiły się co prawda prace, w których przedstawiono próby wykorzystania tzw. techniki odwróconej harmonicznej do identyfikacji położenia rezonansów w obecności silnej absorpcji [67], jednak metoda ta jest bardzo skomplikowana i nie gwarantuje odtworzenia wszystkich rezonansów.

Rysunek 3.1.6 przedstawia rozkład NNSD uzyskany dla sieci z ramionami skierowanymi, w którym celowo pominięto jeden rezonans (ten o mniejszej częstotliwości) z każdej pary „słabo” rozdzielonych rezonansów czyli takich, które były oddalone od siebie o odległość mniejszą niż ich średnia szerokość. Jak widać na rysunku 3.1.6, w obszarze $0,5 < s < 1$ występuje znaczna nadwyżka liczby rezonansów. Jest to zrozumiałe, gdyż „zgubienie” stanu własnego powoduje w analizie widma fałszywy przyrost większych i deficyt mniejszych odległości między poziomami energetycznymi.

Ten prosty przykład pokazuje, że metody określania chaotyczności układów wymagające wyznaczenia częstotliwości lub też energii własnych, zawodzą w obecności absorpcji, a przy dużej jej wartości stają się wręcz bezużyteczne.



Rys. 3.1.6

Rozkład NNSD, w którym celowo pominięto jeden rezonans z każdej pary rezonansów, które dzieliła odległość mniejsza niż ich średnia szerokość.

3.2. Rozkład macierzy reakcji Wignera i współczynnika odbicia R

3.2a. Rozkład macierzy reakcji Wignera i współczynnika odbicia R dla sieci mikrofalowych

W tym rozdziale przedstawię wyniki badań rozkładów, których kształt zależy od wielkości absorpcji w układzie. Są to rozkłady rzeczywistej i urojonej części macierzy reakcji Wignera [68], która w literaturze nazywana jest też macierzą K [69].

W układach mikrofalowych macierz K związana jest z impedancją elektryczną Z tych układów poprzez relację [70]:

$$Z = iK. \quad (3.2a.1)$$

Badanie układu za pomocą jednej anteny pozwala na wyznaczenie jednoportowej macierzy rozpraszania S (Rys. 2.3c.1), powiązanej z macierzą K następującą relacją:

$$S = \frac{1-iK}{1+iK}. \quad (3.2a.2)$$

Równanie 3.2a.2 jest słuszne dla układów z absorpcją, ale nie są w nim uwzględnione tzw. procesy bezpośrednie [71]. Procesami bezpośrednimi nazywamy zjawiska niezwiązane z cechami badanego układu, ale dające wkład do mierzonego sygnału. Tak więc, nie są to procesy uniwersalne. W przypadku omawianego jednoportowego pomiaru jest to między innymi sygnał odbity od wejścia do sieci, związany z nieidealnym sprzężeniem badanego obiektu ze źródłem sygnału.

Jedną z pierwszych prac, poświęconych badaniom statystycznych właściwości macierzy rozpraszania S układów chaotycznych była publikacja Lópeza, Mello i Seligmána [72]. Wyniki dalszych badań, w tym dla układów z absorpcją, oraz rola procesów bezpośrednich zostały przedstawione w pracach [73; 74; 75; 76; 77; 78]. Obiektem rozważań, zarówno teoretycznych jak i eksperymentalnych, były także rozkłady współczynnika odbicia $P(R)$ oraz części rzeczywistej i urojonej macierzy reakcji Wignera $P(u)$, $P(v)$ [69; 70; 79; 80; 81; 82]. Rozkład współczynnika odbicia $P(R)$ w dwuwymiarowych wnękach rezonansowych badany był eksperymentalnie

przez Méndez-Sánchez i innych [72]. W pracy [72] uzyskano dobrą zgodność wyników doświadczalnych z przybliżonymi przewidywaniami teoretycznymi. Należy dodać, że rozkłady $P(R)$, $P(u)$, $P(v)$ badano już doświadczalnie w sieciach mikrofalowych [65; 66], jednak tylko w przypadku niezbyt dużej absorpcji, dla której $\gamma \leq 7.1$.

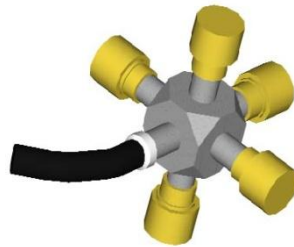
W niniejszej pracy przedstawiono wyniki badania rozkładów $P(R)$, $P(u)$, $P(v)$ dla znacznie większych wartości absorpcji γ , zarówno dla sieci z ramionami nieskierowanymi, które symulują układy z zachowaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu jak i dla sieci z ramionami skierowanymi, w których symetria ta jest złamana. W pracach [65; 66; 72] uzyskane wyniki porównywano z przewidywaniami teoretycznymi opartymi jedynie o przybliżone formuły. Natomiast rezultaty przedstawione w niniejszej pracy porównano z przewidywaniami uzyskanymi na podstawie dokładnych formuł wyprowadzonych przez Fyodorova i Savina w pracy [82].

Do wykonania pomiarów wykorzystano układ pomiarowy przedstawiony na rysunku 2.3c.1. Na każdym ramieniu badanej sieci mikrofalowej znajdował się atenuator. Zastosowanie atenuatorów 1 dB, a w dalszej kolejności 2 dB, pozwoliło na zmianę wartości absorpcji sieci w granicach $19 < \gamma < 55$. Absorpcję sieci mikrofalowej można także zmieniać poprzez zmianę długości jej ramion [48]. Jednak jest to mało efektywne i niezbyt wygodne, gdyż absorpcja kabli zmienia się wraz z częstotliwością sygnału (wz. 2.3a.1).

W eksperymencie wyznaczono macierze rozpraszania S dla sieci sześciowierzchołkowych za pomocą mikrofalowego analizatora wektorowego Hewlett-Packard 8720A. Pomiarów wykonano w przedziale częstotliwości 7.5 – 9.5 GHz, z krokiem 2.5 MHz.

Na rysunku 3.2a.1 przedstawiono element układu, który wykorzystano do wyeliminowania wkładu procesów bezpośrednich do mierzonego sygnału. Układ składał się z analizatora wektorowego i sześcioramiennego wierzchołka wejściowego. Jedno z ramion wierzchołka podłączono do analizatora, a na pozostałe pięć nakręcono 50Ω obciążenia falowe. Zamknięcie ramienia 50Ω obciążeniem falowym jest równoważne wydłużeniu go do nieskończoności. W rezultacie do analizatora docierał wyłącznie sygnał odbity od wierzchołka, odpowiadający procesowi bezpośredniemu. Pomiar tego sygnału, nazywanego macierzą radiacyjną S_{rad} , w takim samym przedziale

częstotliwości, w jakim badana była sieć, umożliwił wyeliminowanie z mierzonego sygnału wkładu procesów bezpośrednich.



Rys. 3.2a.1

Wierzchołek sześcioramienny służący do pomiaru radiacyjnej macierzy rozpraszania S_{rad} , używanej w procedurze eliminacji efektów związanych z procesami bezpośrednimi.

Pierwszym krokiem prowadzącym do eliminacji procesów bezpośrednich jest obliczenie impedancji znormalizowanej z [65; 70; 79]:

$$z = \frac{Re(Z_{rad}) + i(Im(Z_{rad}) - Im(Z_{rad}))}{Re(Z_{rad})}, \quad (3.2a.3)$$

gdzie $Z_{rad} = \frac{Z_0(1+S_{rad})}{(1-S_{rad})}$, $Z_r = \frac{Z_0(1+S_{rad})}{(1-S_{rad})}$, a Z_0 jest charakterystyczną stałą impedancją użytego przewodu mikrofalowego, wynoszącą w naszym przypadku 50Ω .

Posługując się impedancją znormalizowaną z oraz wykorzystując zależność 3.2a.1 można obliczyć wartość macierzy reakcji Wignera, która odpowiada idealnemu sprzężeniu sieci z analizatorem, a więc sytuacji, w której procesy bezpośrednie nie występują:

$$K = -iz. \quad (3.2a.4)$$

Wzory 3.2a.2 i 3.2a.4 pozwalają także na obliczenie macierzy rozpraszania bez wkładu związanego z procesami bezpośrednimi:

$$S_0 = \frac{1-z}{1+z}. \quad (3.2a.5)$$

Rozkład macierzy Wignera oraz współczynnika odbicia R został przebadany dla sieci z nieskierowanymi oraz skierowanymi ramionami. W pierwszym przypadku

uśredniono rezultaty 88 realizacji sieci mikrofalowych z ramionami zawierającymi atenuatory 1 dB, oraz 74 realizacji z atenuatorami 2 dB. W drugim przypadku uzyskane wyniki są rezultatem uśrednienia 100 konfiguracji zawierających atenuatory 1 dB oraz 100 konfiguracji zawierających atenuatory 2 dB. W celu skonstruowania sieci z ramionami skierowanymi użyto cyrkulatorów opisanych w rozdziale 2.3. Poszczególne konfiguracje różniły się między sobą całkowitą długością sieci. W przypadku symulacji grafów z symetrią względem odwrócenia czasu długości optyczne sieci zawierały się w przedziale od 574 do 656 cm dla sieci z atenuatorami 1 dB, oraz od 554 do 636 cm dla sieci z atenuatorami 2 dB. W przypadku symulacji grafów ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu długości konfiguracji zawierały się od 516 cm do 560 cm z atenuatorami 1 dB i od 499 cm do 533 cm z atenuatorami 2 dB.

Wartość współczynnika absorpcji γ wyznaczona była poprzez dopasowanie teoretycznego średniego współczynnika odbicia $\langle R \rangle_{ther}$ do średniego doświadczalnego współczynnika odbicia $\langle R \rangle_{exp}$, a więc:

$$\langle R \rangle_{exp} = \langle R \rangle_{ther}, \quad (3.2a.6)$$

gdzie:

$$\langle R \rangle_{exp} = \langle S_0 S_0^* \rangle, \quad (3.2a.7)$$

a

$$\langle R \rangle_{ther} = \int_0^1 P(R) R dR. \quad (3.2a.8)$$

Rozkład prawdopodobieństwa $P(R)$ dany jest przez wyrażenie [82]:

$$P(R) = \frac{2}{(1-R)^2} P_0(x). \quad (3.2a.9)$$

Postać funkcji $P_0(x)$, gdzie $x = \frac{(1+R)}{(1-R)}$, zależy od klasy symetrii układu. Dla grafów kwantowych ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu ma ona postać [82]:

$$P_0(x) = \frac{1}{2} \left[A \left(\frac{\gamma(x+1)}{2} \right) + B \right] e^{-\frac{\gamma(x+1)}{2}}. \quad (3.2a.10)$$

Stałe $A = e^\gamma - 1$ i $B = 1 + \gamma - e^\gamma$ zależą od wartości współczynnika absorpcji γ w układzie.

W przypadku grafów z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu wyznaczenie rozkładu $P(R)$ jest bardziej skomplikowane. Funkcja $P_0(x)$ wyrażona jest przez pochodną [82]:

$$P_0(x) = -\frac{dW(x)}{dx}. \quad (3.2a.11)$$

Wielomian $W(x)$ ma postać:

$$W(x) = \frac{x+1}{4\pi} [f_1(w)g_2(w) + f_2(w)g_1(w) + h_1(w)j_2(w) + h_2(w)j_1(w)]_{w=\frac{(x-1)}{2}}, \quad (3.2a.12)$$

a funkcje f i g wyrażone są przez całki:

$$f_1(w) = \int_w^\infty dt \frac{\sqrt{|t-w|} e^{-\frac{\gamma t}{2}}}{(1+t)^2} \left(1 - e^{-\gamma} + \frac{1}{t} \right), \quad (3.2a.13)$$

$$g_1(w) = \int_w^\infty dt \frac{e^{-\frac{\gamma t}{2}}}{\sqrt{|t-w|}(1+t)^2}, \quad (3.2a.14)$$

$$h_1(w) = \int_w^\infty dt \frac{\sqrt{|t-w|} e^{-\frac{\gamma t}{2}}}{\sqrt{t}(1+t)} [\gamma + (1 - e^{-\gamma})(\gamma t - 2)], \quad (3.2a.15)$$

$$j_1(w) = \int_w^\infty dt \frac{1}{\sqrt{|t-w|}\sqrt{1+t}} e^{-\frac{\gamma t}{2}}. \quad (3.2a.16)$$

Funkcje $f_2(w)$, $g_2(w)$, $h_2(w)$ i $j_2(w)$ mają taką samą postać jak funkcje z indeksem 1 we wzorach 3.2a.13-16 z wyjątkiem granic całkowania, które zmieniają się z $t \in [w, \infty]$ na $t \in [0, w]$.

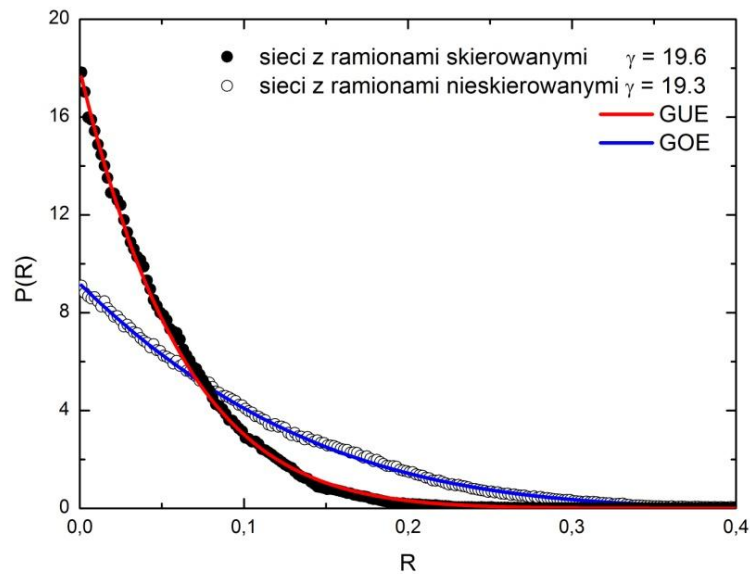
Rozkłady części rzeczywistej $P(u)$ i części urojonej $P(v)$ macierzy reakcji Wignera są również wyrażone za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa $P_0(x)$ [82]:

$$P(u) = \frac{1}{2\pi\sqrt{u^2+1}} \int_0^\infty dq P_0 \left[\frac{\sqrt{u^2+1}}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) \right], \quad (3.2a.17)$$

$$P(v) = \frac{\sqrt{2}}{\pi v^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dq P_0 \left[q^2 + \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right], \quad (3.2a.18)$$

gdzie $-v = \text{Im}(K) < 0$ i $u = \text{Re}(K)$.

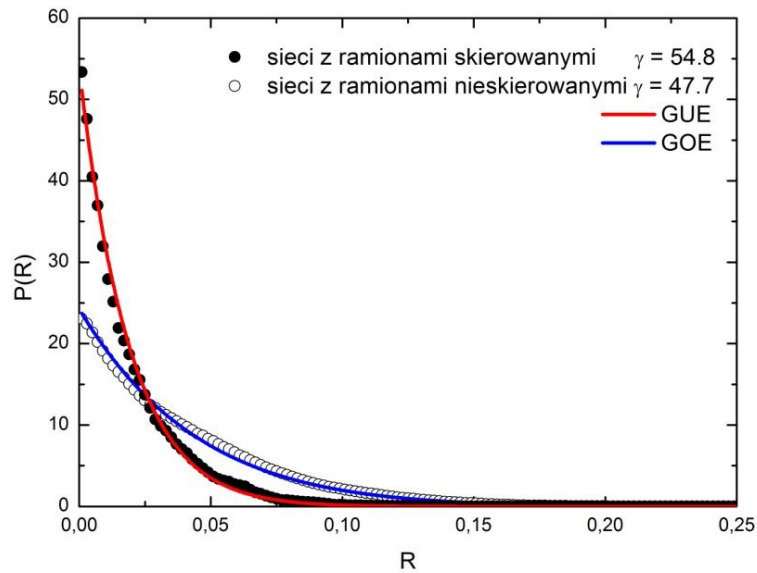
Rysunek 3.2a.2 przedstawia uzyskany doświadczalnie rozkład współczynnika odbicia $P(R)$ w przypadku sieci z ramionami skierowanymi ($\gamma = 19.6$) i nieskierowanymi ($\gamma = 19.3$). Rozkłady te otrzymano uśredniając wyniki dla sieci zawierających na każdym z ramion atenuator 1 dB.



Rys. 3.2a.2

Doświadczalne rozkłady współczynnika odbicia $P(R)$ uzyskane odpowiednio dla sieci o ramionach skierowanych (pełne kółka) i nieskierowanych (puste kółka) z atenuatorami 1 dB. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linie ciągłe).

Z kolei na rysunku 3.2a.3 przedstawiono rozkłady dla sieci z ramionami nieskierowanymi ($\gamma = 47.7$) oraz dla sieci z ramionami skierowanymi ($\gamma = 54.8$), uzyskane z uśrednienia rezultatów otrzymanych dla sieci z atenuatorami 2 dB.



Rys. 3.2a.3

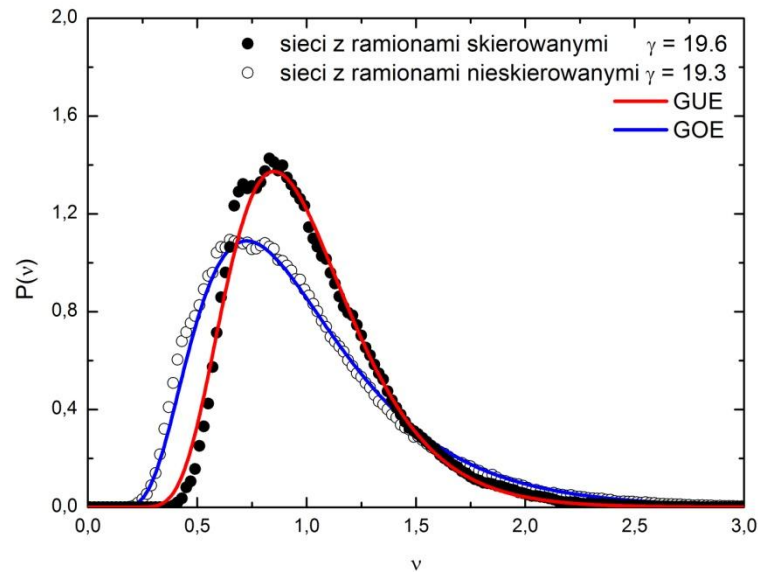
Doświadczalne rozkłady współczynnika odbicia $P(R)$ uzyskane odpowiednio dla sieci o ramionach skierowanych (pełne kółka) i nieskierowanych (puste kółka) z atenuatorami 2 dB. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linie ciągłe).

Doświadczalne wyniki porównano z przewidywaniami teoretycznymi (formuły 3.2a.9-11). Zarówno w przypadku sieci z ramionami nieskierowanymi jak i skierowanymi, niezależnie od wartości γ , widać dobrą zgodność wyników doświadczalnych z teoretycznymi.

Na rysunku 3.2a.4 przedstawiono eksperymentalny rozkład urojonej części $P(v)$ macierzy K , otrzymany dla mikrofalowych sieci z ramionami skierowanymi i nieskierowanymi, dla tych samych wartości gamma, co w przypadku rozkładów pokazanych na rysunku 3.2a.2. Uzyskane rozkłady potwierdzają przewidywania teoretyczne (formuły 3.2a.10-11 i 3.2a.18), jednak można zauważyć pewne niewielkie odstępstwa.

W rozkładzie dla sieci z ramionami nieskierowanymi ($\gamma = 19.3$) punkty doświadczalne leżą nieco poniżej krzywej teoretycznej, w pobliżu maksimum

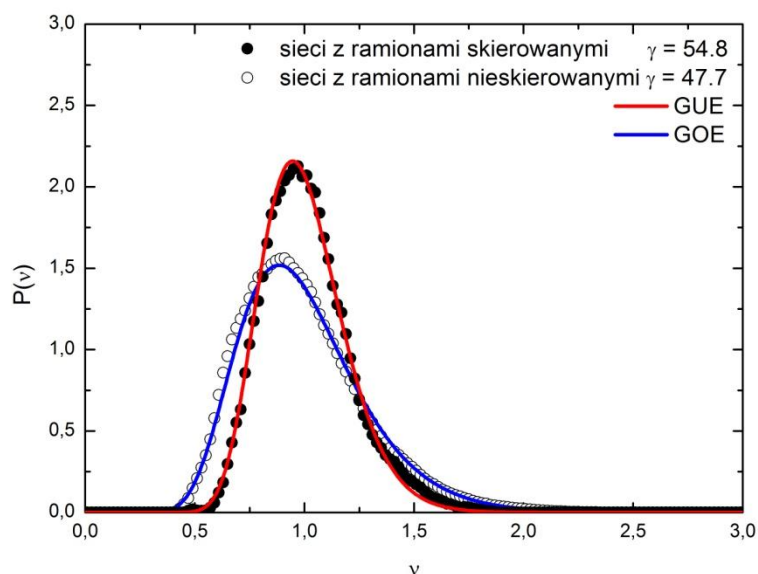
i odchylają się od niej w stronę mniejszych wartości dla $0.3 < v < 0.5$. Punkty doświadczalne rozkładu dla sieci ze skierowanymi ramionami ($\gamma = 19.6$) w przedziale $0.6 < v < 1.25$ są przesunięte w stronę mniejszych wartości, a dla $v < 0.6$ w stronę przeciwną względem krzywej teoretycznej. Największa rozbieżność między wynikami doświadczalnymi i przewidywaniami teoretycznymi widoczna jest w okolicach $v \approx 0.7$.



Rys. 3.2a.4

Doświadczalne rozkłady urojonej części $P(v)$ macierzy Wignera uzyskane odpowiednio dla sieci o ramionach skierowanych (pełne kółka) i nieskierowanych (puste kółka) z atenuatorami 1 dB . Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linie ciągłe).

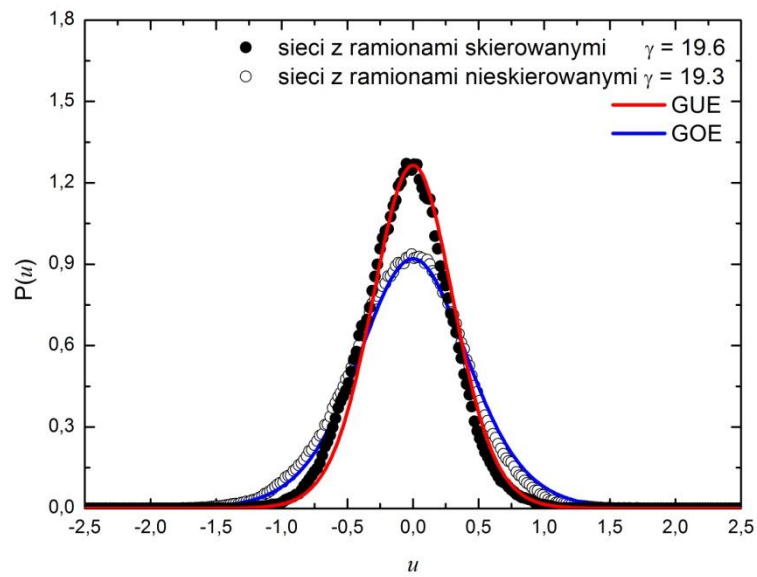
W przypadku realizacji sieci z atenuatorami 2 dB (Rys. 3.2a.5), uzyskane doświadczalnie rozkłady urojonej części $P(v)$ macierzy K wykazują jeszcze lepszą zgodność z przewidywaniami teoretycznymi niż rozkłady uzyskane w przypadku mniejszej absorpcji. Rozkład doświadczalny $P(v)$ dla sieci ze skierowanymi ramionami ($\gamma = 54.8$), jedynie w pobliżu maksimum wykazuje niewielkie odstępstwa od rozkładu teoretycznego, natomiast w przypadku sieci z ramionami nieskierowanymi ($\gamma = 47.7$) rozkład ten jest minimalnie przesunięty względem rozkładu przewidzianego przez teorię w stronę mniejszych wartości u w obszarze $0.5 < u < 0.75$.



Rys. 3.2a.5

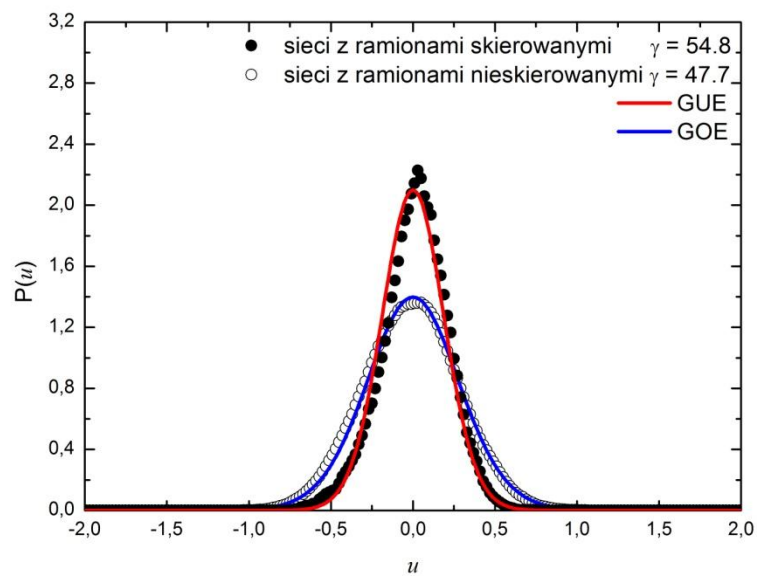
Doświadczalne rozkłady urojonej części $P(v)$ macierzy Wignera uzyskane odpowiednio dla sieci o ramionach skierowanych (pełne kółka) i nieskierowanych (puste kółka) z atenuatorami 2 dB. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linie ciągłe).

Dobrą zgodność wyników doświadczalnych z przewidywaniami teoretycznymi otrzymano także w przypadku rozkładu rzeczywistej części $P(u)$ macierzy reakcji Wignera (rysunki 3.2a.6 i 3.2a.7). Uzyskane wyniki potwierdzają słuszność równań 3.2a.10-11 i 3.2a.17. Oczywiście widoczne są pewne niewielkie rozbieżności. W przypadku pomiarów sieci z atenuatorami 1 dB (Rys. 3.2a.6), zarówno dla sieci z ramionami skierowanymi jak i nieskierowanymi można zauważyć, że rozkłady eksperymentalne są przesunięte względem rozkładów teoretycznych w stronę mniejszych wartości u (pomijając okolice maksimum). Z kolei dla sieci z atenuatorami 2 dB (Rys. 3.2a.7) różnice między wynikami eksperymentalnymi i teoretycznymi widoczne są właściwie tylko w przypadku sieci z ramionami skierowanymi. W obszarze $-0.25 < u < 0.3$ rozkład doświadczalny jest przesunięty względem teoretycznego w stronę większych wartości u , a w samym centrum rozkładu punkty doświadczalne leżą wyraźnie powyżej krzywej teoretycznej. Wydaje się, że głównym powodem opisanych, niewielkich rozbieżności może być zbyt mała, z punktu widzenia możliwości całkowitego wykluczenia wpływu nieuniwersalności badanych układów, liczba doświadczalnych realizacji sieci mikrofalowych.



Rys. 3.2a.6

Doświadczalne rozkłady rzeczywistej części $P(u)$ macierzy Wignera uzyskane odpowiednio dla sieci o ramionach skierowanych (pełne kółka) i nieskierowanych (puste kółka) z atenuatorami 1 dB. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linie ciągłe).

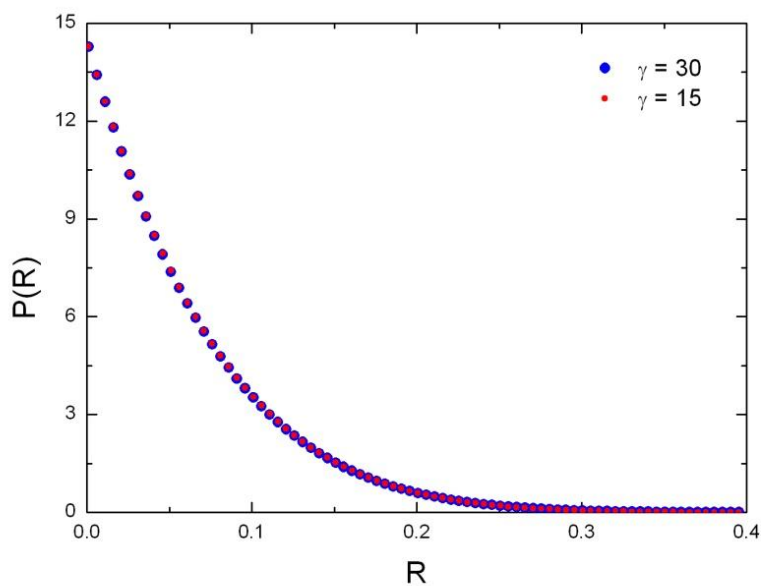


Rys. 3.2a.7

Doświadczalne rozkłady rzeczywistej części $P(u)$ macierzy Wignera uzyskane odpowiednio dla sieci o ramionach skierowanych (pełne kółka) i nieskierowanych (puste kółka) z atenuatorami 2 dB. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linie ciągłe).

Wyznaczone dla sieci mikrofalowych doświadczalne rozkłady współczynnika odbicia $P(R)$ oraz części rzeczywistych i urojonych macierzy reakcji Wignera $P(u)$ i $P(v)$ w pełni potwierdzają najnowsze, dokładne teoretyczne rezultaty uzyskane przy wykorzystaniu teorii supersymetrii [71]. Mogą być zatem z powodzeniem stosowane do weryfikacji chaotyczności układów kwantowych.

Niestety, metoda ta posiada pewne ograniczenia. Otóż bez znajomości wartości współczynnika γ , nie jest ona w stanie odpowiedzieć na pytanie do jakiej klasy symetrii należy badany układ. Wynika to z pewnej ciekawej cechy tych rozkładów. Otóż ich przebieg dla układów o klasie symetrii $\beta = 1$ i $\beta = 2$ jest identyczny, kiedy absorpcja w układzie z $\beta = 1$ jest dwa razy większa niż w układzie z $\beta = 2$ (Rys. 3.2a.8).



Rys. 3.2a.8

Porównanie rozkładu współczynnika odbicia dla układów typu GOE i GUE. Układom typu GOE (niebieskie kółka) odpowiada rozkład dla układów GUE (czerwone kółka) o dwa razy mniejszej wartości współczynnika absorpcji γ .

Należy również podkreślić, że przedstawione powyżej wyniki są pierwszą doświadczalną weryfikacją przewidywań teoretycznych dla układów, które symulują układy ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu.

3.2b. Rozkład macierzy reakcji Wignera i współczynnika odbicia R dla trójwymiarowych wnęk rezonansowych

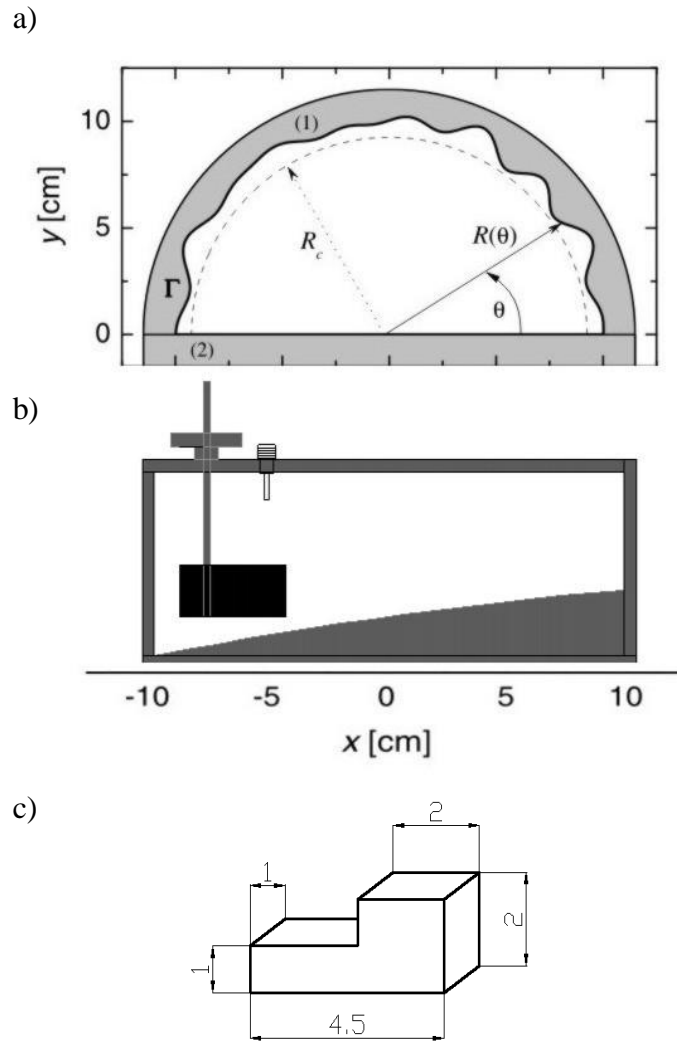
Rozkłady urojonej i rzeczywistej części macierzy Wignera oraz współczynnika odbicia $P(R)$ wyznaczono także dla chaotycznej trójwymiarowej wnęki rezonansowej z umieszczonym w jej wnętrzu absorberem. Kształt tej wnęki został schematycznie przedstawiony na rysunku 3.2b.1. O chaotyczności wnęki w dużym stopniu decydował półcyldryczny element chropowaty w płaszczyźnie XY (element (1) na rysunku 3.2b.1a). Kształt tego elementu jest opisany za pomocą formuły:

$$R(\theta) = R_0 + \sum_{m=2}^M a_m \sin(m\theta + \Phi_m), \quad (3.2b.1)$$

gdzie $R_0 = 10 \text{ cm}$, $0 \leq \theta < \pi$, a $M = 20$. Współczynniki a_m i fazy Φ_m przyjmowały wartości zawarte odpowiednio, w przedziałach $[0.084, 0.091]$ oraz $[0, 2\pi]$. Opisany element był domknięty w płaszczyźnie XZ ścianką w kształcie prostokąta o wymiarach $23.7 \times 0.9 \text{ cm}^2$ (element (2) na rysunku 3.2b.1a). Wnęka została zamknięta dwoma niejednakowymi denkami. Jedno z nich było płaskie a drugie posiadało wypukłość zaburzającą symetrię w kierunku osi Z (Rys. 3.2b.1b). Powierzchnia chropowata zaprojektowana została do eksperymentalnych badań dwuwymiarowych układów chaotycznych [83].

Do wnętrza wnęki został wprowadzony absorber. Absorber miał kształt litery L (Rys. 3.2b.1c) i został umocowany asymetrycznie na trzpieniu śruby umożliwiającej jego kontrolowany obrót w płaszczyźnie XY (Rys. 3.2b.1b). Różne pozycje absorbera, podobnie jak zmiany długości sieci mikrofalowych, odpowiadają różnym realizacjom wnęki.

Wykonano 28 pomiarów dla kolejnych ustawień absorbera, różniących się między sobą o 5° . W pomiarach otrzymano wartości współczynnika gamma w granicach od 80 do 114.



Rys. 3.2b.1

Schemat trójwymiarowej wnęki mikrofalowej użytej do badania rozkładów współczynnika odbicia i macierzy reakcji Wignera.

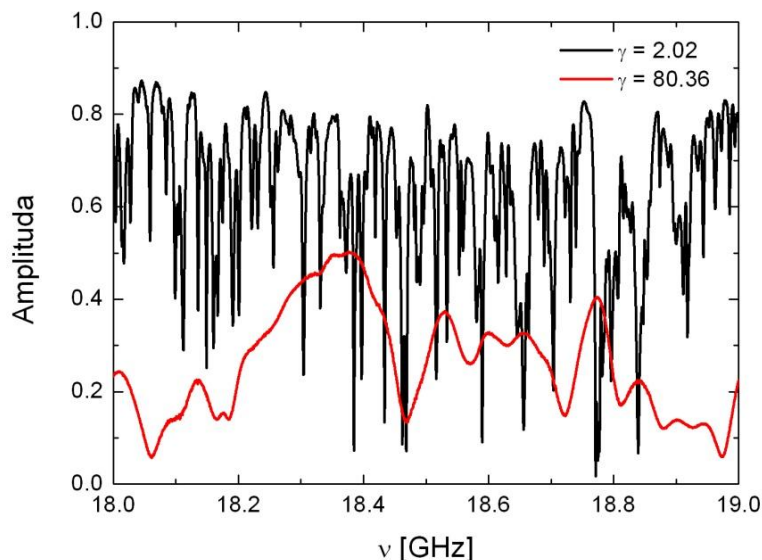
- a) schematyczny obraz wnęki w płaszczyźnie XY ,
- b) schematyczny obraz wnęki w płaszczyźnie XZ wraz z absorberem umocowanym na metalowym trzpieniu śruby umożliwiającej jego obrót,
- c) kształt i wymiary absorbera wprowadzonego do wnęki.

Na rysunku 3.2b.2 porównano widmo uzyskane dla wnęki bez absorbera $\gamma = 2.02$ (czarna linia), z widmem dla wnęki z absorberem $\gamma = 80.36$ (czerwona linia). Rysunek ten doskonale ilustruje poszerzenie rezonansów spowodowane absorpcją, co uniemożliwia ich identyfikację.

Przybliżona liczba rezonansów w pustej trójwymiarowej wnęcie rezonansowej dana jest przez wzór Baliana [84]:

$$N_{max}(k) \cong \frac{1}{3\pi^2} V k^3, \quad (3.2b.2)$$

gdzie k oznacza wektor falowy, a V jest objętością rezonatora. W omawianym przypadku $V = (7.337 \pm 0.012) \times 10^{-4} \text{ m}^3$.

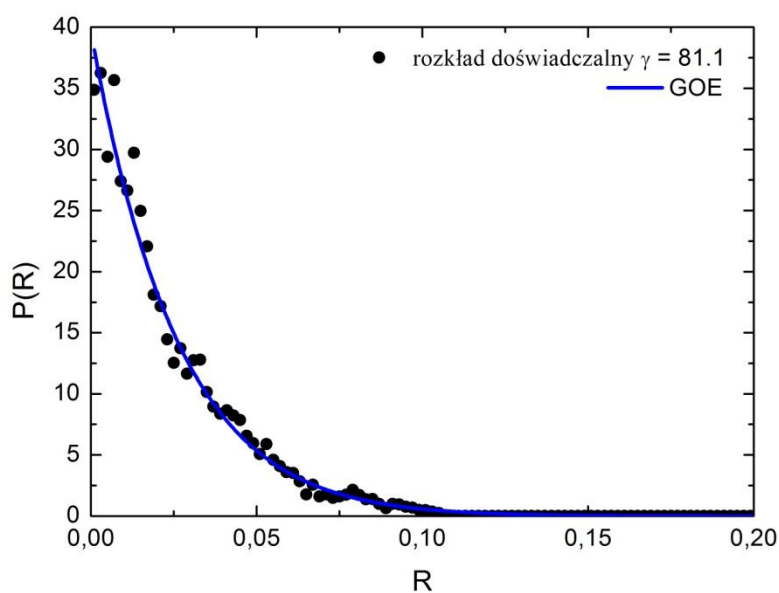


Rys. 3.2b.2

Porównanie uzyskanego doświadczalnie fragmentu widma dla trójwymiarowej wnęki rezonansowej bez absorbera (linia czarna) z widmem dla tej samej wnęki, wewnątrz której znajdował się absorber (linia czerwona).

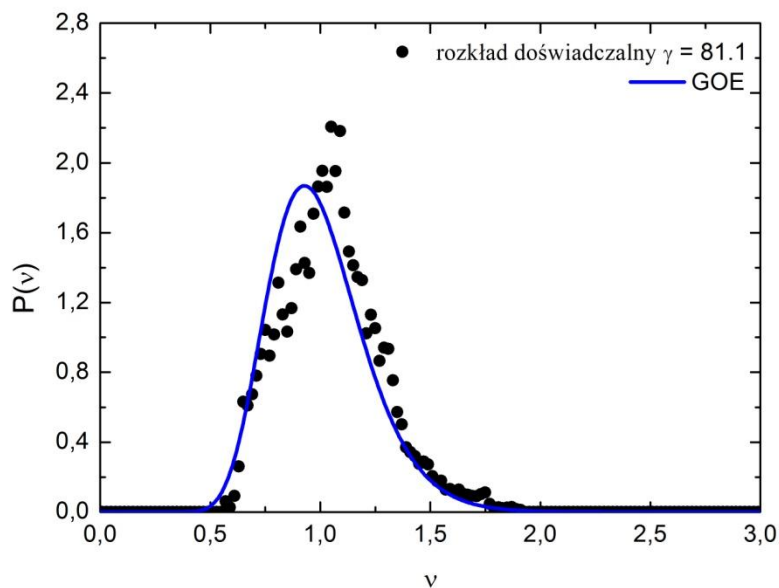
Średni rozkład współczynnika odbicia $P(R)$ uzyskany dla 28 konfiguracji absorbera przedstawiono na rysunku 3.2b.3. W tym przypadku zgodność pomiędzy przewidywaniami teoretycznymi a rezultatami eksperymentu jest zaskakująco dobra, biorąc pod uwagę fakt, że z formalnego punktu widzenia wnęki trójwymiarowa nie symuluje układu kwantowego, co wynika z opisanego wcześniej braku analogii pomiędzy równaniami Schrödingera i Helmholtza w przestrzeni trójwymiarowej.

Nieco gorzej prezentują się rozkłady $P(\nu)$ i $P(u)$ (odpowiednio Rys. 3.2b.4 i 3.2b.5). Otrzymane rezultaty wykazują wyraźne odstępstwa od przewidywań teoretycznych dla układów kwantowych, w przeciwieństwie do wyników uzyskanych w przypadku sieci mikrofalowych. Pomimo tych rozbieżności, wyniki te stanowią zachętę do przeprowadzenia dalszych badań obiektów trójwymiarowych.



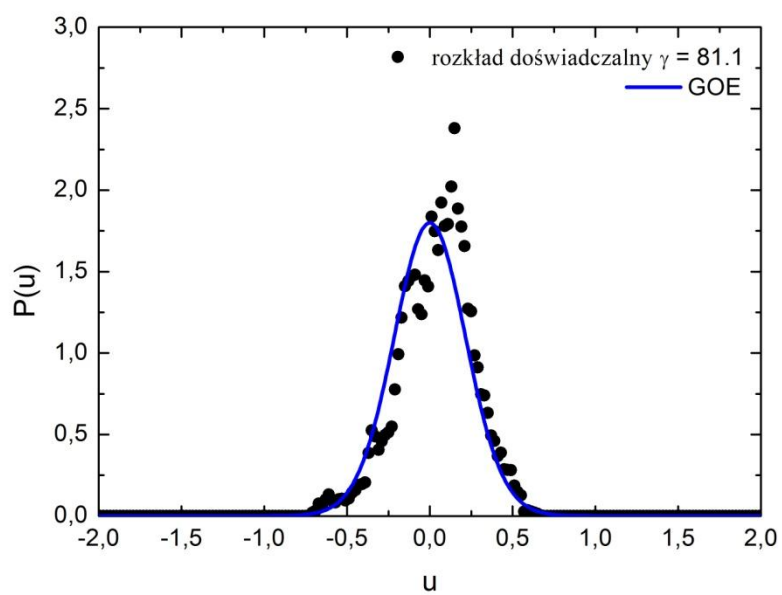
Rys. 3.2b.3

Doświadczalny rozkład współczynnika odbicia $P(R)$ uzyskany dla trójwymiarowej chaotycznej wnęki mikrofalowej. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linia ciągła).



Rys. 3.2b.4

Doświadczalny rozkład urojonej części $P(v)$ macierzy reakcji Wignera dla trójwymiarowej chaotycznej wnęki mikrofalowej. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linia ciągła).



Rys. 3.2b.5

Doświadczalny rozkład rzeczywistej części $P(u)$ macierzy reakcji Wignera dla trójwymiarowej chaotycznej wnęki mikrofalowej. Wyniki doświadczalne porównano z wynikami teoretycznymi (linia ciągła).

3.3. Funkcje korelacji macierzy rozpraszania

3.3a. Funkcja korelacji krzyżowej macierzy rozpraszania

W związku z brakiem możliwości wiarygodnego wyznaczenia rozkładu NNSD w układach z silną absorpcją zaistniała konieczność znalezienia innych kryteriów, które pozwalałyby na identyfikację klasy symetrii takich układów. Okazało się, że rolę taką może pełnić funkcja korelacji krzyżowej [85; 86]:

$$c_{12}(v) = \frac{\langle S_{12}(v+\Delta v)S_{21}^*(v+\Delta v) \rangle_{\Delta v}}{\sqrt{\langle |S_{12}(v+\Delta v)|^2 \rangle_{\Delta v} \langle |S_{21}(v+\Delta v)|^2 \rangle_{\Delta v}}}, \quad (3.3a.1)$$

gdzie $\langle \dots \rangle_{\Delta v}$ oznacza uśrednienie w oknie częstotliwościowym Δv .

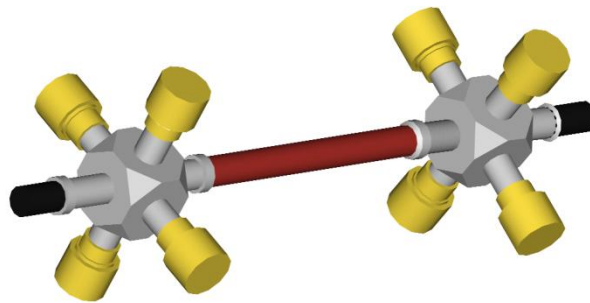
Funkcja korelacji krzyżowej dla układów, w których występuje symetria względem odwrócenia czasu ma wartość 1. Dla układów, w których występuje całkowite złamanie tej symetrii, wartość funkcji wynosi 0.

W celu wyznaczenia funkcji korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ dokonałem pomiarów transmisyjnych w sześciowierzchołkowych sieciach mikrofalowych. Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rysunku 2.3c.2. Sieć mikrofalową podłączono do dwóch portów wektorowego analizatora mikrofalowego Agilent E8364B. Pomiarów dokonano w oknie częstotliwościowym 4 – 14 GHz z krokiem 875 kHz, w przypadku sieci z zachowaną symetrią i w przedziale częstotliwości 7 – 14 GHz z krokiem 437 kHz dla sieci z ramionami skierowanymi. Sieci z ramionami skierowanymi zostały zrealizowane poprzez podłączenie do wierzchołków sieci cyrkulatorów (patrz rozdz. 2.3). Zwiększoną absorpcję uzyskano dzięki użyciu atenuatorów 1 dB oraz 2 dB.

Funkcja korelacji krzyżowej powinna być obliczana po wyeliminowaniu z mierzonego sygnału wkładu procesów bezpośrednich, które nie mają związku z właściwościami badanego układu

Na rysunku 3.3a.1 pokazano podstawowy element układu doświadczalnego służącego do pomiaru radiacyjnej macierzy rozpraszania \hat{S}_{rad} , wykorzystywanej do usunięcia efektów procesów bezpośrednich. Różnica pomiędzy układem pokazanym na rysunku 3.2a.1 i 3.3a.1 związana jest z tym, że w przypadku pomiarów transmisyjnych, oprócz sygnałów odbitych od wierzchołków wejściowo/wyjściowych (wierzchołków

sześcioramiennych), musimy uwzględnić także sygnał przechodzący przez ramię „przelotowe”, łączące wierzchołki wejściowy i wyjściowy, praktycznie nie penetrujący sieci, który należy traktować jako wkład od procesów bezpośrednich. Tak więc, w tym przypadku, do pomiaru radiacyjnej macierzy rozpraszania \hat{S}_{rad} , należy użyć fragmentu sieci, składającego się z wierzchołków sześcioramiennych i ramienia je łączącego (Rys. 3.3a.1). Pozostałe cztery, nie połączone ramiona wierzchołków, zostały zamknięte 50 Ω obciążeniami falowymi.



Rys. 3.3a.1

Układ doświadczalny wykorzystany do pomiaru czteroelementowej macierzy rozpraszania \hat{S}_{rad} .

W celu wyeliminowania procesów bezpośrednich w przypadku pomiarów dwuportowych zastosowano procedurę opisaną w pracy [87] (patrz też rozdz. 3.2a). Wyznaczone macierze \hat{S}_{rad} i \hat{S} zostały wykorzystane odpowiednio do obliczenia radiacyjnej macierzy impedancji \hat{Z}_{rad} :

$$\hat{Z}_{rad} = \hat{Z}_0^{\frac{1}{2}} \frac{(I + \hat{S}_{rad})}{(I - \hat{S}_{rad})} \hat{Z}_0^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3a.2)$$

oraz macierzy impedancji \hat{Z} :

$$\hat{Z} = \hat{Z}_0^{\frac{1}{2}} \frac{(I + \hat{S})}{(I - \hat{S})} \hat{Z}_0^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3a.3)$$

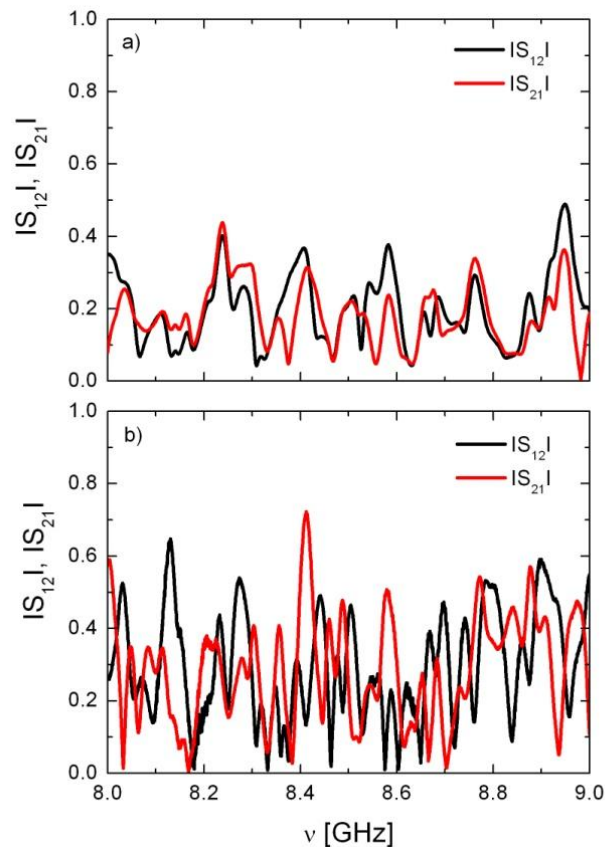
Macierz \hat{Z}_0 jest charakterystyczną macierzą impedancji użytych przewodów. Na przekątnej macierzy \hat{Z}_0 wartości elementów wynoszą 50 Ω , natomiast elementy pozadiagonalne są równe zero. Macierz I jest macierzą jednostkową o rozmiarze 2×2 . Macierze \hat{Z}_{rad} i \hat{Z} pozwalają wyznaczyć unormowaną macierz impedancji \hat{z} :

$$\hat{z} = (\text{Re}[\hat{Z}_{rad}])^{-\frac{1}{2}}(\hat{Z} - i\text{Im}[\hat{Z}_{rad}])(\text{Re}[\hat{Z}_{rad}])^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.3a.4)$$

dzięki której można otrzymać macierz rozpraszania \hat{S}_0 , bez wpływu efektów związanych z procesami bezpośrednimi:

$$\hat{S}_0 = \frac{(\hat{z}-I)}{(\hat{z}+I)}. \quad (3.3a.5)$$

Na rysunku 3.3a.2 pokazano przykład dwóch sygnałów transmisyjnych $|S_{12}|$ i $|S_{21}|$, przechodzących w różnych kierunkach przez sieć zawierającą cyrkulatory.



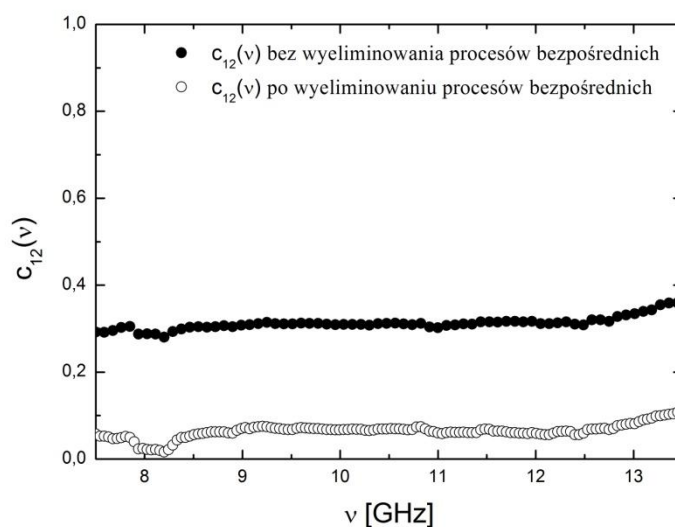
Rys. 3.3a.2

Przykłady sygnałów $|S_{12}|$ i $|S_{21}|$ dla sieci zawierającej cyrkulatory.

- Porównanie modułów elementów $|S_{12}|$ i $|S_{21}|$ macierzy rozpraszania \hat{S} bez eliminacji efektów procesów bezpośrednich,
- Porównanie modułów elementów $|S_{12}|$ i $|S_{21}|$ macierzy rozpraszania \hat{S} po wyeliminowaniu efektów procesów bezpośrednich.

Rysunek 3.3a.2a przedstawia widma tych sygnałów bez odjęcia udziałów procesów bezpośrednich, a rysunek 3.3a.2b po wyeliminowaniu tych udziałów. Widać, że

w pierwszym przypadku sygnały $|S_{12}|$ i $|S_{21}|$ prawie nie różnią się od siebie, natomiast po wyeliminowaniu udziałów procesów bezpośrednich sytuacja ulega radykalnej zmianie. Jeszcze wyraźniej potrzebę eliminacji wkładu procesów bezpośrednich obrazuje rysunek 3.3a.3, na którym pokazano funkcje korelacji $c_{12}(v)$ obliczone po usunięciu tych udziałów (puste kółka) i bez ich usunięcia (pełne kółka).

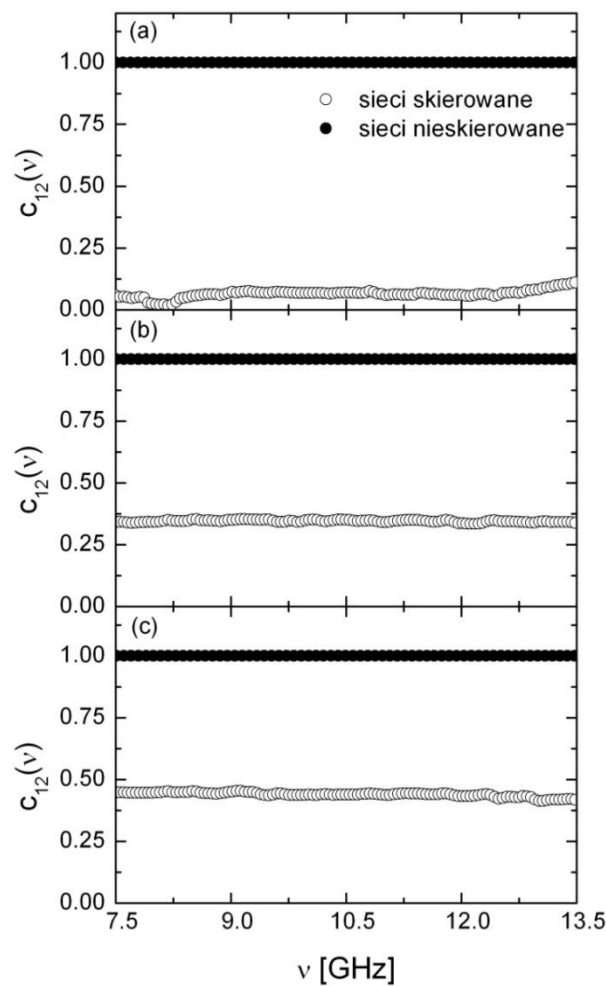


Rys. 3.3a.3

Funkcja korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ wyznaczona na podstawie macierzy \hat{S} , z której nie wyeliminowano wkładu procesów bezpośrednich (pełne kółka) oraz funkcja $c_{12}(v)$ obliczona po wyeliminowaniu tego wkładu (puste kółka). W obydwu przypadkach funkcję $c_{12}(v)$ wyznaczono dla tej samej konfiguracji sieci mikrofalowej.

Rysunek 3.3a.4 przedstawia funkcje korelacji krzyżowych dla kilku wartości współczynnika absorpcji γ . Panel 3.3a.4a przedstawia rezultaty otrzymane dla sieci mikrofalowych z nieskierowanymi ramionami i $\gamma = 5.5$ oraz dla sieci z ramionami skierowanymi i $\gamma = 5.6$. Panel 3.3a.4b prezentuje wyniki dla sieci z ramionami nieskierowanymi z $\gamma = 39$ oraz skierowanymi z $\gamma = 27$. Panel 3.3a.4c przedstawia rezultaty dla sieci bez cyrkulatorów, ze współczynnikiem absorpcji $\gamma = 50.5$ oraz dla sieci zawierających cyrkulatory z $\gamma = 61.2$. Sieci o małej absorpcji, o najniższych wartościach γ , nie zawierały atenuatorów. Natomiast sieci o większych wartościach absorpcji uzyskano poprzez dołączenie do ich ramion odpowiednio atenuatorów 1 dB i 2 dB . Nie wymieniano natomiast ramion sieci mikrofalowych. Wszystkie zaprezentowane wyniki otrzymano w wyniku uśrednienia rezultatów doświadczalnych w przedziale $\Delta v \in [-350, 350]\text{ MHz}$.

Rysunek 3.3a.4 pokazuje, że wartości funkcji korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ uzyskane dla sieci symulujących kwantowe układy chaotyczne ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu, zawierają się w przedziale $0 < c_{12}(v) < 1$. Ponadto, zauważalny jest wzrost wartości $c_{12}(v)$ wraz ze wzrostem absorpcji w układzie. Powodem takiego zachowania się funkcji $c_{12}(v)$ jest zwiększenie się szerokości rezonansów wraz ze wzrostem absorpcji, co powoduje zacieranie się różnicy pomiędzy sygnałami transmisyjnymi $|S_{12}|$ i $|S_{21}|$.



Rys. 3.3a.4

Funkcje korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ dla różnych wartości absorpcji dla sieci z ramionami nieskierowanymi (pełne kółka) i ramionami skierowanymi (puste kółka):

- a) ramiona nieskierowane $\gamma = 5.5$, skierowane $\gamma = 5.6$,
- b) ramiona nieskierowane $\gamma = 39$, skierowane $\gamma = 27$,
- c) ramiona nieskierowane $\gamma = 50.5$, skierowane $\gamma = 61.2$.

Uzyskane wyniki doświadczalne potwierdzają fakt, że funkcja korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ jest wielkością, która pozwala na identyfikację klasy symetrii

falowych i kwantowych układów chaotycznych z absorpcją. Nawet w obecności silnej absorpcji, funkcja $c_{12}(v)$ może być użyta do odróżnienia układów klasy GOE od układów, w których symetria względem odwrócenia czasu jest częściowo lub całkowicie złamana. Niestety, ze względu na to, że funkcja korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ dla układów typu GUE zależy od wielkości absorpcji, w sytuacji gdy $0 < c_{12} < 1$, nie można jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie czy mamy do czynienia z układem z całkowicie zlaną symetrią względem odwrócenia czasu, w którym występuje silna absorpcja, czy też z układem, w którym symetria ta jest tylko częściowo złamana.

3.3b. Funkcja autokorelacji macierzy rozpraszania

W ramach niniejszej pracy sprawdzona została także użyteczność funkcji autokorelacji macierzy rozpraszania $c(v_0)$. W przypadku, gdy rozważany sygnał transmisyjny związany jest z elementem S_{12} macierzy \hat{S} , funkcja $c(v_0)$ ma postać [88]:

$$c(v_0) = \langle S_{12}(v)S_{12}^*(v + v_0) \rangle - |\langle S_{12}(v) \rangle|^2, \quad (3.3b.1)$$

gdzie v_0 jest zasięgiem badanej korelacji.

Funkcja autokorelacji $c(v_0)$ może być stosowana do określenia klasy symetrii układu, gdyż przybliżona postać jej transformaty Fouriera zależy nie tylko od współczynnika absorpcji γ , lecz także od wartości współczynnika β określającego klasę symetrii układu [71; 89]:

$$\tilde{c}(\tau) \approx \left(1 + \frac{2T}{\beta} \tau\right)^{-2} \exp(-\gamma\tau). \quad (3.3b.2)$$

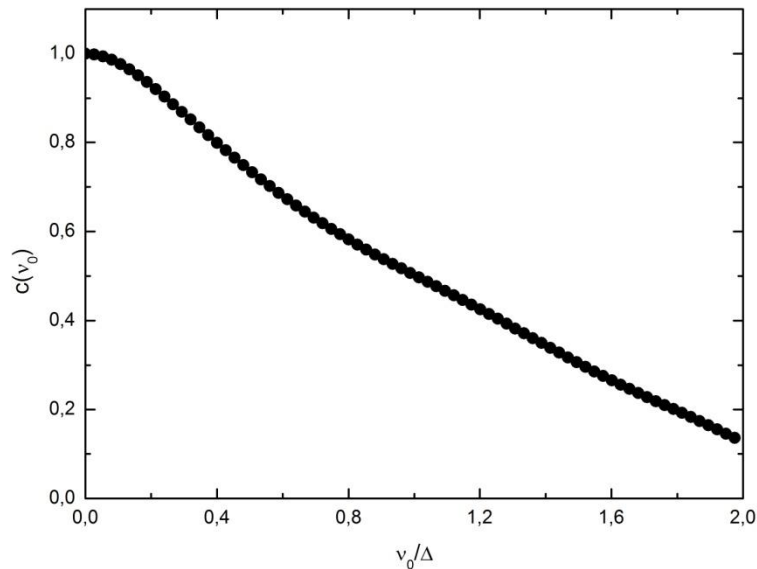
We wzorze 3.3b.2 T oznacza wartość współczynnika transmisji, a τ jest czasem wyrażonym w jednostkach czasu Heisenberga:

$$t_H = \frac{2\pi}{\Delta}, \quad (3.3b.3)$$

gdzie Δ oznacza średnią odległość między rezonansami.

W celu obliczenia funkcji autokorelacji wyznaczono elementy macierzy rozpraszania $S_{12}(v)$ dla sieci mikrofalowej nie zawierającej ramion skierowanych i atenuatorów. Pomiary wykonano w przedziale częstotliwościowym $0.5 - 2.5 \text{ GHz}$, z krokiem $12,5 \text{ kHz}$, przy użyciu analizatora mikrofalowego Agilent E8364B (patrz rozdz. 2.3c).

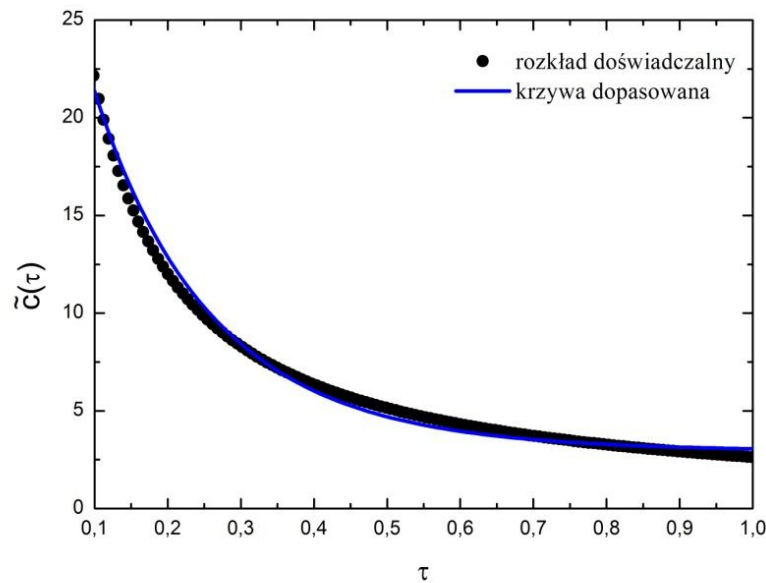
Uzyskaną doświadczalnie funkcję $c(v_0)$ przedstawiono na rysunku 3.3b.1. Średnia odległość między rezonansami wynosiła $\Delta = 28.1 \text{ MHz}$.



Rys. 3.3b.1

Funkcja autokorelacji $c(v_0)$ uzyskana doświadczalnie dla sieci mikrofalowej w przedziale częstotliwościowym $0 - 2.5 \text{ GHz}$. Średnia odległość między rezonansami $\Delta = 28.1 \text{ MHz}$.

Rysunek 3.3b.2 przedstawia transformatę Fouriera $\tilde{c}(\tau)$ (pełne kółka) wraz z dopasowaną krzywą teoretyczną 3.3b.2 (linia ciągła). Dopasowanie dokonano przy założeniu, że klasa symetrii układu wynosi $\beta = 1$.



Rys. 3.3b.2

Transformata Fouriera $\tilde{c}(\tau)$ (pełne kółka) wraz z dopasowaną do niej krzywą o postaci $\tilde{c}(\tau) = A((1 + 2T\tau)^{-2} \exp(-\gamma\tau)) + B$. Parametry dopasowanej krzywej: $A \approx 35 \pm 0.7$, $T \approx 0.6 \pm 0.1$, $\gamma \approx 3.9 \pm 0.5$, $B \approx 2.9 \pm 0.1$.

Odstępstwa rozkładu doświadczalnego od przybliżonej krzywej teoretycznej, która powinna opisywać $\tilde{c}(\tau)$ dla $\tau < 1$ są dosyć wyraźne, ale zarazem na tyle małe, że nie wykluczają potencjalnej możliwości zastosowania funkcji autokorelacji $c(v_0)$ do określenia klasy symetrii układów. Jednak, nawet dla sieci z małą wartością współczynnika absorpcji γ , niezbędne było przeprowadzenie bardzo czasochłonnych pomiarów o rozdzielczości zbliżonej do maksymalnej rozdzielczości standardowych analizatorów mikrofalowych. W przypadku układów o większej absorpcji pomiary te byłyby bardzo trudne do wykonania. Oznacza to, że funkcja autokorelacji $c(v_0)$ dla układów o dużej absorpcji przestaje być użytecznym kryterium doświadczalnym, pozwalającym na weryfikację klasy symetrii układów chaotycznych.

3.4. Elastyczny współczynnik wzmocnienia

Inną, ważną wielkością, którą można wyznaczyć na podstawie znajomości elementów macierzy rozpraszania \hat{S} , jest tzw. elastyczny współczynnik wzmocnienia $W_{S,\beta}$ [71; 89]:

$$W_{S,\beta} = \frac{\sqrt{\text{var}(S_{11})\text{var}(S_{22})}}{\text{var}(S_{12})}, \quad (3.4.1)$$

gdzie $\text{var}(S_{ab}) = \langle |S_{ab}|^2 \rangle - |\langle S_{ab} \rangle|^2$ jest wariancją elementu S_{ab} .

Współczynnik ten swoją nazwę zawdzięcza analogii do elastycznego współczynnika wzmocnienia, używanego w fizyce jądrowej [90].

Jego wartość zależy od klasy symetrii układu β i współczynnika absorpcji γ [71]:

$$W_{S,\beta} = 2 + \delta_{1\beta} - \int_0^\infty b_{2,\beta} \left(\frac{s}{\gamma}\right) e^{-s} ds. \quad (3.4.2)$$

Analityczną postać funkcji $b_{2,\beta}(\tau)$ dla $\beta = 1$ można przedstawić jako [82]:

$$b_{2,\beta=1}(\tau) = [1 - 2\tau + \tau \log(1 + 2\tau)]\Theta(1 - \tau) + \left[\tau \log\left(\frac{2\tau+1}{2\tau-1}\right) - 1 \right] \Theta(\tau - 1), \quad (3.4.3)$$

a dla $\beta = 2$:

$$b_{2,\beta=2}(\tau) = (1 - \tau)\Theta(1 - \tau), \quad (3.4.4)$$

gdzie funkcja $\Theta(x)$ jest jednostkową funkcją schodkową, a τ jest czasem wyrażonym w jednostkach czasu Heisenberga (wz. 3.3b.3).

Asymptotycznie dla małych i dużych γ współczynnik $W_{S,\beta}$ przyjmuje następujące wartości:

$$W_{S,\beta} = \begin{cases} 2 + \delta_{1\beta} & \text{dla } \gamma \ll 1 \\ 1 + \delta_{1\beta} & \text{dla } \gamma \gg 1 \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Wartości współczynnika $W_{S,\beta}$ (wz. 3.4.5) przytoczono na podstawie prac Fyodorova i innych [71; 89]. Natomiast w pracy teoretycznej [91] autorzy dowodzą, że współczynnik wzmocnienia ma stałą, uniwersalną wartość $\frac{2}{\beta}$ w całym zakresie wartości absorpcji, a więc również dla $\gamma \ll 1$. Istnieje zatem zgodność co do wartości współczynnika wzmocnienia dla wartości γ większych od jedności. W układach GOE, czyli układach z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu wraz ze wzrostem absorpcji $W_{S,1} \rightarrow 2$, zaś dla układów GUE, gdzie symetria ta jest złamana, $W_{S,\beta} \rightarrow 1$.

Właściwości elastycznego współczynnika wzmocnienia $W_{S,\beta}$ wskazują na to, że w przeciwieństwie do funkcji korelacji krzyżowej i innych do tej pory omawianych wielkości, może on być użyty do jednoznacznej oceny chaotyczności oraz klasy symetrii badanego układu, również w obecności silnej absorpcji.

Wariancje macierzy rozpraszania $var(S_{11})$, $var(S_{12})$, $var(S_{21})$, $var(S_{22})$, niezbędne do otrzymania $W_{S,\beta}$, badano już doświadczalnie dla trójwymiarowych wnęk mikrofalowych [92], z absorpcją, dla której $\gamma \gg 1$, i wykazano, że $W_{S,\beta=1} \cong 2$. Natomiast odwrotność elastycznego współczynnika wzmocnienia $\Xi_{S,\beta} = \frac{1}{W_{S,\beta}}$, badana była teoretycznie i doświadczalnie przez grupę S. Anlage [93]. Badania te przeprowadzono dla dwuwymiarowej, chaotycznej wnęki mikrofalowej. Potwierdzono, że dla układów z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu spełnione są zależności 3.4.5, zarówno dla dużej jak i dla małej wartości absorpcji.

Celem przeprowadzonych badań było uzyskanie doświadczalnych rozkładów współczynnika $W_{S,\beta}$ dla sieci mikrofalowych symulujących układy kwantowe zarówno z zachowaną jak i złamaną symetrią względem odwrócenia czasu w funkcji absorpcji. Pomiar macierzy rozpraszania \hat{S} przeprowadzono dla sieci sześciowierzchołkowych. Użyto w nich mikrofalowego analizatora wektorowego Agilent E8364B (patrz rozdz. 2.3c). W przypadku sieci z ramionami nieskierowanymi pomiarów dokonano w oknie częstotliwościowym 4 – 14 GHz, z krokiem 875 kHz, a w przypadku sieci o ramionach skierowanych (z cyrkulatorami) 7 – 14 GHz, z krokiem 437 kHz. Radiacyjne macierze rozpraszania \hat{S}_{rad} , niezbędne do eliminacji wkładu procesów bezpośrednich przy wyznaczaniu współczynnika absorpcji γ w sieci mikrofalowej,

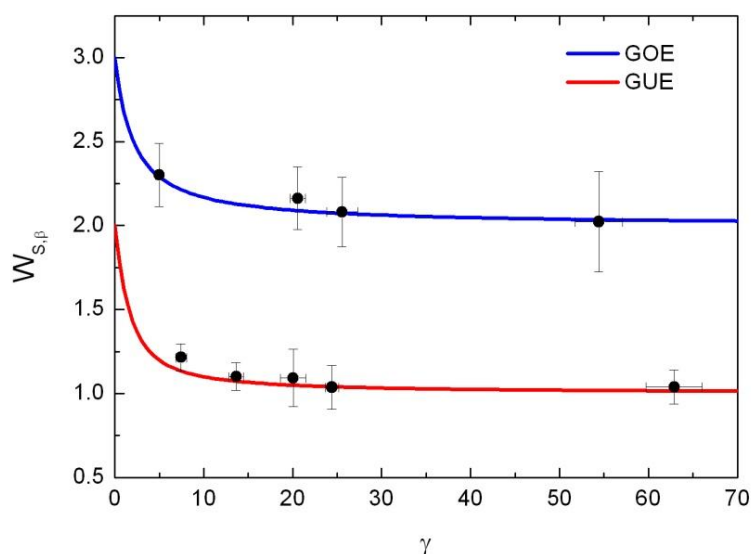
wyznaczano stosując układ przedstawiony na rysunku 3.3a.1. Procedura eliminowania wkładu tych procesów była identyczna jak w przypadku analizy funkcji korelacji krzyżowych (patrz rozdz. 3.3a). Bezwymiarowy współczynnik absorpcji γ był wyznaczany poprzez znajdowanie takiego teoretycznego rozkładu współczynnika odbicia $P(R)$, aby odpowiadający mu średni teoretyczny współczynnik odbicia $\langle R \rangle_{ther}$ był równy uzyskanej wartości doświadczalnej $\langle R \rangle_{exp}$ (3.2a.6). Wartość absorpcji otrzymywano poprzez uśrednienie wartości γ^1 i γ^2 wyznaczanych dla obydwu wierzchołków wejściowo/wyjściowych:

$$\gamma = \frac{\gamma^1 + \gamma^2}{2}. \quad (3.4.6)$$

Absorpcję w sieciach mikrofalowych regulowano zmieniając liczbę i rodzaj atenuatorów na przewodach łączących wierzchołki sieci. W przypadku sieci nieskierowanych (bez cyrkulatorów) dokonano pomiarów sześćdziesięciu realizacji sieci bez atenuatorów (średnia wartość $\gamma \approx 5.0$), oraz sześćdziesięciu realizacji zawierających piętnaście atenuatorów 1 dB (średnia wartość $\gamma \approx 20.6$). Następnie wykonano pomiary kolejnych sześćdziesięciu realizacji z dziewięcioma atenuatorami 1 dB i sześcioma atenuatorami 2 dB (średnia wartość $\gamma \approx 25.6$), a w końcu z piętnastoma atenuatorami 2 dB (średnia wartość $\gamma \approx 54.4$). Całkowita długość optyczna badanych sieci, z uwzględnieniem długości atenuatorów, zmieniała się od 538 cm do 681 cm .

W przypadku sieci mikrofalowych symulujących grafy kwantowe ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu, wyznaczono $W_{S,\beta=2}$ dla pięciu różnych wartości współczynnika absorpcji. Punkt pierwszy – o najniższej absorpcji ($\gamma \approx 7.4$), uzyskano w wyniku realizacji sieci niezawierających atenuatorów. Następne punkty uzyskano dla sieci zawierających odpowiednio: siedem atenuatorów 1 dB ($\gamma \approx 13.6$), piętnaście atenuatorów 1 dB ($\gamma \approx 20.1$), dziewięć atenuatorów 1 dB i sześć 2 dB ($\gamma \approx 24.4$), a w końcu piętnaście atenuatorów 2 dB ($\gamma \approx 63$). Otrzymane wartości elastycznego współczynnika wzmocnienia w każdym przypadku były wynikiem uśrednienia osiemdziesięciu wartości $W_{S,\beta=2}$ wyznaczonych dla sieci różniących się od siebie długością. Długości te zawierały się w przedziale od 528 cm do 699 cm .

Otrzymane wartości $W_{S,\beta}$ dla wymienionych wyżej przypadków (różnych średnich wartości γ) przedstawiono na rysunku 3.4.1.



Rys. 3.4.1

Elastyczny współczynnik wzmocnienia $W_{S,\beta}$. Wyniki doświadczalne (pełne kółka) porównano z przewidywaniami teoretycznymi dla układów typu GOE (niebieska linia) oraz GUE (czerwona linia).

Zarówno dla sieci o ramionach nieskierowanych (model grafów kwantowych z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu) jak i w przypadku sieci z ramionami skierowanymi (grafy kwantowe ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu) otrzymane doświadczalnie wartości elastycznego współczynnika wzmocnienia są w dobrej zgodności z przewidywaniami teoretycznymi (wz. 3.4.5). Wszystkie te wartości leżą w granicach błędów doświadczalnych, które oszacowano używając standartowego odchylenia z próby. Najgorzej prezentuje się punkt uzyskany dla $\gamma \approx 7.4$, dla którego odchylenie od krzywej teoretycznej jest praktycznie równe maksymalnej wartości błędu. Ze względu na absorpcję kabli mikrofalowych nie można było wyznaczyć wartości elastycznego współczynnika dla $\gamma < 5$, co byłoby bardzo interesujące z punktu widzenia dyskusji na temat asymptotycznych zachowań $W_{S,\beta}$ dla $\gamma \rightarrow 0$ [71; 91].

Próbie doświadczalnego zbadania zachowania elastycznego współczynnika wzmocnienia dla słabej absorpcji podjęła ostatnio grupa Richtera [94]. Jednakże duża rozpiętość otrzymanych wyników i ich duża niepewność w granicy $\lim_{\gamma \rightarrow 0} W_{S,\beta=1} \approx 3$ powodują, że konieczne są dalsze badania doświadczalne tego współczynnika w obszarze małej absorpcji. Dla dużych wartości γ zachowanie elastycznego

współczynnika wzmocnienia $W_{S,\beta}$ bardzo dobrze zgadza się z przewidywaniami teoretycznymi (wz. 3.4.5). Dlatego też współczynnik ten może być stosowany jako uniwersalna miara do badania chaotyczności i klasy symetrii układów kwantowych w sytuacji gdy inne metody pomiarowe przestają być użyteczne ze względu na silną absorpcję.

Podsumowując, zbadano doświadczalnie elastyczny współczynnik wzmocnienia $W_{S,\beta}$ dla sieci mikrofalowych symulujących chaotyczne układy kwantowe typu GOE i GUE. Pokazano, że otrzymane wyniki doświadczalne potwierdzają słuszność przewidywań teoretycznych (wz. 3.4.5). W ten sposób po raz pierwszy zweryfikowano eksperymentalnie zależność elastycznego współczynnika wzmocnienia od absorpcji dla układów, które symulują układy ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu. Wykazano więc, że $W_{S,\beta}$ może służyć między innymi jako proste "narzędzie", pozwalające na doświadczalne określenie klasy symetrii układu kwantowego. Należy podkreślić, że współczynnik $W_{S,\beta}$ może być stosowany w całym zakresie tłumienia, a więc także w obszarze silnej absorpcji, gdzie zawodzi większość innych metod badania klasy symetrii chaotycznych układów kwantowych.

4. Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było doświadczalne badanie chaosu kwantowego i falowego w układach otwartych, czyli takich, w których istotną rolę odgrywa zjawisko absorpcji. Szczególnie ważne było znalezienie nowych wielkości pozwalających na określenie stopnia chaotyczności oraz klasy symetrii badanych układów, także w przypadku obecności silnej absorpcji. Większość dotychczas stosowanych w tym celu metod zawodzi, gdy na skutek absorpcji niemożliwa jest identyfikacja częstotliwości lub energii własnych układu.

W przedstawionych w ramach tej pracy badaniach doświadczalnych, wykorzystano jednowymiarowe układy mikrofalowe symulujące grafy kwantowe i trójwymiarowe wnęki mikrofalowe, które nie mają formalnego odpowiednika kwantowego. Znaczna część wyników zawartych w niniejszej pracy została już opublikowana [51; 65; 86; 95; 96] i przedstawiona na międzynarodowych konferencjach naukowych.

Uzyskane doświadczalnie rozkłady odległości między najbliższymi sąsiadami – NNSD (rozdz. 3.1) świadczą o tym, że sieci mikrofalowe mogą być stosowane do symulacji grafów kwantowych, a tym samym są doskonałym obiektem pozwalającym na doświadczalne badanie zjawisk chaosu kwantowego. Pokazano, że zastosowanie cyrkulatorów mikrofalowych pozwala na otrzymanie sieci z ramionami skierowanymi, które symulują grafy ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu.

Po raz pierwszy uzyskano doświadczalne rozkłady współczynnika odbicia $P(R)$ oraz części rzeczywistych i urojonych macierzy reakcji Wignera $P(u)$ i $P(v)$ dla układów symulujących zarówno układy typu GOE jak i GUE w obecności silnej absorpcji (rozdz. 3.2). Rezultaty te potwierdzają najnowsze, dokładne przewidywania teoretyczne wynikające z teorii supersymetrii [71].

Nieregularne, trójwymiarowe wnęki mikrofalowe, mimo iż nie mają swoich bezpośrednich odpowiedników w trójwymiarowych chaotycznych układach kwantowych [10], posiadają niektóre właściwości przewidziane dla takich układów [55; 58]. I tak, rozkład współczynnika $P(R)$ uzyskany dla trójwymiarowej wnęki z absorpcją, jest bardzo zbliżony do przewidywanego przez teorię, natomiast rozkłady $P(v)$ i $P(u)$ wyraźnie odbiegały od przewidywań teoretycznych.

Wyniki uzyskane dla sieci mikrofalowych sugerują, że rozkłady $P(R)$, $P(v)$ i $P(u)$ mogą być z powodzeniem użyte do weryfikacji chaotyczności układów kwantowych. Niestety, bez znajomości wartości współczynnika γ , nie można na ich podstawie rozróżnić klasy symetrii do jakiej należy układ. Wynika to z faktu, iż rozkłady $P(R)$, $P(v)$ i $P(u)$ dla układów typu GOE odpowiadają rozkładowi dla układów typu GUE z dwa razy mniejszym współczynnikiem absorpcji γ .

W rozdziale 3.3a przedstawiono wyniki doświadczalne uzyskane dla funkcji korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$. Wykazano, że pozwala ona na identyfikację klasy symetrii układów kwantowych również takich, w których występuje zjawisko absorpcji. Dla układów z zachowaną symetrią względem odwrócenia czasu jej wartość wynosi 1, natomiast w przypadku gdy symetria ta jest naruszona, jej wartość zawiera się w przedziale $(0; 1)$. Niestety, wartość funkcji korelacji krzyżowej $c_{12}(v)$ rośnie wraz ze wzrostem absorpcji. Zatem funkcja ta nie pozwala na jednoznaczne określenie tego, czy mamy do czynienia z układem z całkowicie złamaną symetrią względem odwrócenia czasu, w którym występuje silna absorpcja, czy też w układzie tym symetria ta jest tylko częściowo złamana.

Rozdział 3.3b poświęcono omówieniu funkcji autokorelacji $c(v_0)$. Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi kształt transformaty Fouriera $\tilde{c}(\tau)$ funkcji $c(v_0)$ powinien zależeć od klasy symetrii układu. Niestety, szybki zanik $\tilde{c}(\tau)$, nawet w obecności słabej absorpcji sprawia, że funkcja ta nie może być użytecznym "narzędziem" określającym klasę symetrii układu.

W ostatnim rozdziale 3.4 niniejszej pracy przedstawiono rezultaty doświadczalnej weryfikacji zależności elastycznego współczynnika wzmocnienia $W_{S,\beta}$ od współczynnika absorpcji γ . Dla układów, które symulują układy ze złamaną symetrią ze względu na odwrócenie czasu, współczynnik $W_{S,\beta}$ został wyznaczony po raz pierwszy. Wykazano, że w przeciwieństwie do pozostałych opisanych wielkości, $W_{S,\beta}$ pozwala na jednoznaczne, określenie klasy symetrii układu kwantowego, nawet w przypadku silnej absorpcji.

Bibliografia

1. I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości*, PWN: Warszawa (2001).
2. E. Ott, *Chaos w układach dynamicznych*, WNT: Warszawa (1997).
3. H. Poincare, *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*, Gauthier-Villas: Paris (1892).
4. E.N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atoms. Sci.* **20**, 130 (1963).
5. L. D. Landau, E. M. Lifszyc, *Mechanika kwantowa*, PWN: Warszawa (1978).
6. J. E. Bayfield, P.M. Koch, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 258 (1974).
7. A. Haffmans, R. Blümel, P.M. Koch, L. Sirko, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 248 (1994).
8. B. Ratajska-Gadomska, W. Gadomski, *Optics Express* **17**, 14166-14171 (2009).
9. T. Gorin, T. Prosen, T. Seligmann, M. Znidaric, *Phys. Rep.* **435**, 33 (2006).
10. S. Deus, P.M. Koch, L. Sirko, *Phys. Rev. E* **52**, 1146 (1995).
11. O. Bohigas, M. J. Giannoni, *Lecture Notes in Physics* **209**, (1984).
12. M. L. Mehta, *Random Matrices 2nd ed.*, Academic Press: New York (1991).
13. M. V. Berry, M. Tabor, *Proc. Roy. Soc. Londyn A* **235**, 375 (1977).
14. O. Bohigas, M. J. Giannoni, C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
15. F. J. Dyson, M. L. Mehta, *J. Math. Phys.* **4**, 701 (1963).
16. M. L. Mehta, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, Academy Press: New York, London (1967).
17. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).
18. T. Guhr, A. Muller-Groeling, H. A. Wiedemuller. *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).
19. C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, Academic Press: New York (1965).

20. R. Aurich, F. Scheffler, F. Steiner, Phys. Rev. E **51**, 4173–4189 (1995).
21. R. Aurich, M. Taglieber, Physica D **118**, 84-102 (1998).
22. B. D. Simons, B. L. Altshuler, Phys. Rev. B **48**, 5422 (1993).
23. B. D. Simons, B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **70**, 4063 (1993).
24. X. Yang, J. Burgdörfer, Phys. Rev. A **46**, 2295 (1992).
25. F. Schäfer, B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **70**, 587 (1993).
26. A. Relaño, J. M. G. Gomez, R. A. Molina, J. Retamosa, Phys. Rev. Lett. **89**, 244102 (2002).
27. T. Kottos, U. Smilansky, Annals of Physics **274**, 76 (1999).
28. T. Kottos, U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **79**, 4794 (1997).
29. T. Kottos, U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **85**, 968 (2000).
30. L. J. Pauling, Chem. Phys. **4**, 673 (1936).
31. E. L. Ivchenko, A. A. Kiselev, JETP Lett. **67**, 43 (1998).
32. J. A. Sánchez-Gil, V. Freilikher, I. Yurkevich, A. A. Maradudin, Phys. Rev. Lett. **80**, 948 (1988).
33. C. Flecia, R. Johnston, H. Kunz, Europhys. Lett. **3**, 497 (1987).
34. S. W. Lee, R. Mitra, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, Macmillan: New York (1971).
35. Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic systems*, University Press: Oxford, New York (1996) .
36. D. Kowal, U. Sivan, O. Entin-Wohlman, Y. Imry, Phys. Rev. B **42**, 9009 (1990).
37. Y. Avishai, J. M. Luck, Phys. Rev. B **45**, 1074 (1992).
38. T. Nakayama, K. Yakubo, R. L. Orbach, Rev. Mod. Phys. **66**, 381 (1994).
39. Y.G Sinai, Func. Anal. Appl. **2**, 61 (1968).

40. Y.G. Sinai, Sov. Math. Dokl. **4**, 1818 (1963).
41. F. Borgonovi, G. Casati , B. Li, Phys. Rev. Lett. **77**, 4744 (1996).
42. F. Borgonovi, P. Conti , D. Rebuzzi , B. Hu , B. Li, Phys. D **131**, 317 (1999).
43. L. A. Bunimovich, Func. Anal. Appl. **8**, 254 (1974) .
44. H. Primack, U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **74**, 4831 (1995).
45. S. W. McDonald, A. N. Kauffman, Phys. Rev. Lett. **42**, 1189 (1979).
46. D. S. Jones, *Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press: Oxford 254 (1964).
47. M. Pasternak, *Podstawy techniki mikrofal*, WAT: Warszawa (2002).
48. O. Hul, Sz. Bauch, P. Pakoński, N. Savytsky, K. Życzkowski, L. Sirko, Phys. Rev. E **69**, 056205 (2004).
49. P. Exner, Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A **66**, 359 (1997).
50. Y. N. Demkov, V. N. Ostrovskij, *Method of Zero-Range Potentials in Atomic Physics*, Leningrad University Press: Leningrad (1975).
51. M. Ławniczak, O. Hul, S. Bauch, P. Šeba, L. Sirko, Phys. Rev. E **77**, 056210 (2008).
52. H.-J. Stöckman, J. Stein, Phys. Rev. Lett. **64**, 2215 (1990).
53. L.R. Arnaut, Phys. Rev. E **73**, 036604 (2006).
54. T. Prosen, Phys. Lett. A **233**, 323 (1997).
55. H. Alt, C. Dembowski, H.D. Graf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, R. Schuhmann, T. Weiland, Phys. Lett. **79**, 1026 (1997).
56. C. Dembowski, B. Dietz, H.-D. Gräf, A. Heine, T. Papenbrock, A. Richter, C. Richter, Phys. Rev. Lett. **89**, 064101 (2002).
57. U. Dörr, H.-J. Stöckmann, M. Barth, U. Kuhl, Phys. Rev. Lett. **80**, 1030 (1998).
58. B. Eckhardt, U. Dörr, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, Europhys. Lett. **46**, 134 (1999).

59. Huber-Suhner, *General Catalogue, Microwave Cables and Assemblies*, (2007).
60. Laird Tech,
e-print:<http://www.lairdtech.com/WorkArea/DownloadAsset.aspx?id=3382>.
61. H. Weyl, *Math. Ann.* **71**, 441 (1911).
62. M. Kac, *Am. Math. Monthly* **73**, 1 (1966).
63. M.C.Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag: 452, 1990.
64. H. Oleh, P. Šeba, L. Sirko, *Phys. Rev. E* **79**, 066204 (2009).
65. O. Hul, S. Bauch, M. Ławniczak, L. Sirko, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 655 (2007).
66. O. Hul, O. Tymoshchuk, Sz. Bauch, P. M. Koch, L. Sirko, *J. Phys. A* **38**, 10489 (2005).
67. H.-J. Stöckman, *Acta Phys. Pol. A* **116**, 783 (2003).
68. G. Akguc, L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **64**, 056221 (2001).
69. D. V. Savin, Y. V. Fyodorov, *JETP Lett.* **80**, 725 (2004).
70. S. Hemmady, X. Zheng, E. Ott, T. M. Antonsen, S. M. Anlage, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 014102 (2005).
71. Y. V. Fyodorov, D. V. Savin, H.-J. Sommers, *J. Phys. A* **38**, 10731 (2005).
72. G. López, P.A. Mello, T.H. Seligman, *Z. Phys. A* **302**, 351 (1981).
73. E. Doron, U. Smilansky, *Nucl. Phys. A* **545**, 455 (1992).
74. P. W. Brouwer, *Phys. Rev. B* **51**, 16878, (1995).
75. E. Kogan, P.A. Mello, H. Liqun, *Phys. Rev. E* **61**, R17 (2000).
76. D. V. Savin, Y. V. Fyodorov, H.-J. Sommers, *Phys. Rev. E* **63**, 035202(R) (2001).
77. P.W. Brouwer, C.W.J. Beenakker, *Physica E* **9**, 463 (2001).
78. Y.V. Fyodorov, *JETP Lett.* **78**, 250 (2003).

79. S. Hemmady, X. Zheng, T. M. Jr. Antonsen, E. Ott, S. M. Anlage, *Acta Phys. Pol. A* **109**, 65 (2006).
80. U. Kuhl, M. Martinez-Mares, R. A. Méndez-Sánchez, H.-J. Stöckmann, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 144101 (2005).
81. R. A. Méndez-Sánchez, U. Kuhl, M. Barth, C. H. Lewenkopf, H.-J. Stöckmann, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 174102 (2003).
82. D.V. Savin, H.-J. Sommers, Y. V. Fyodorov, *JETP Lett.* **82**, 544 (2005).
83. N. Savytsky, O. Tymoshchuk, O. Hul, Sz. Bauch, L. Sirko, *Phys. Lett. A* **372**, 1851 (2008).
84. R. Balian, C. Bloch, *Ann. Phys. (N. Y.)* **84**, 559 (1974).
85. B. Dietz, T. Friedrich, H. L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, H. A. Weidenmüller, *Phys. Rev E* **81**, 036205 (2010).
86. M. Ławniczak, S. Bauch, O. Hul, L. Sirko, *Phys. Scr. T135*, 014050 (2009).
87. S. Hemmady, X. Zheng, J. Hart, T. M. Jr. Antonsen, E. Ott, S. Anlage, *Phys. Rev. E* **74**, 036213 (2006).
88. B. Dietz, T. Friedrich, H. L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, H. A. Weidenmüller, *Phys. Rev. E* **78**, 055204(R) (2008).
89. D. V. Savin, Y. V. Fyodorov, H.-J. Sommers, *Acta Phys. Pol. A* **109**, 53 (2005).
90. J. Verbaarschot, *Ann. Phys. (N. Y.)* **168**, 368 (1986).
91. B. Michielsen, F. Issac, I. Junqua, C. Fiacetti, e-print arXiv:math-ph/0702041.
92. C. Fiacetti, B. Michielsen, *IEE Electronics Letters* **39**, no. 24 1713–1714 (2003).
93. X. Zheng, S. Hemmady, T. M. Jr Antonsen, S. M. Anlage, E. Ott, *Phys. Rev. E* **73**, 046208 (2006).
94. B. Dietz, T. Friedrich, H. L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, J. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 064101 (2009).
95. M. Ławniczak, Sz. Bauch, O. Hul, L. Sirko, *Phys. Rev. E* **81**, 046204 (2010).

96. M. Ławniczak, Sz. Bauch, O. Hul, L. Sirko, Phys. Scr. **T143**, 014014 (2011).