Filip Gampel

Ciągły pomiar położenia i pędu cząstki kwantowej

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
prof. dr hab. Mariusza Gajdy

Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk
Warszawa, 2023

Podziękowania

Podziękowania kieruję przede wszystkim do mojego promotora, profesora Mariusza. Jego profesjonalizm sprawił, że jest on dla mnie zaufanym mentorem, a serdeczna osobowość tworzyła klimat pracy, który zawsze będę ciepło wspominał.

Dziękuję również mojej żonie Agnieszce. Ta praca rosła równolegle z dwojgiem dzieci w jej brzuchu; jestem wdzięczny za jej wsparcie i wyrozumiałość.

Ciągły pomiar położenia i pędu cząstki kwantowej

Filip Gampel

Abstrakt

W wyniku imponującego rozwoju technik doświadczalnych od kilku dekad możliwa jest obserwacja oraz kontrola pojedynczych obiektów kwantowych takich jak atomy czy jony. Taki poziom precyzji był nie do pomyślenia w dobie narodzin mechaniki kwantowej sto lat temu. Tymczasem teoria kwantowa wyróżnia się spośród innych dziedzin fizyki między innymi tym, że pomiar staje się w niej problemem fundamentalnym.

Rozwinięte przez ojców mechaniki kwantowej pojęcie pomiaru rzutowego jest jednym z podstawowych elementów teorii. Jednocześnie jest ono niewystarczające do opisu zdecydowanej większości sytuacji eksperymentalnych. W ramach pomiaru układ kwantowy oddziałuje z instrumentem pomiarowym. Szczegółowy opis dynamiki miernika z reguły nie jest ani pożądany, ani technicznie wykonalny. Konieczne staje się więc opisanie mierzonego układu w ramach teorii układów otwartych. Analiza fizycznie dopuszczalnych odwzorowań takiego układu prowadzi do formalizmu miary dodatnio określonych operatorów (ang. positive operator valued measure, POVM) i współcześnie przyjętego, uogólnionego pojęcia pomiaru.

Opis zmiany stanu kwantowego w wyniku pomiaru jest istotny szczególnie wtedy, gdy jesteśmy zainteresowani wielokrotnie powtórzonym w czasie pomiarem tego samego układu. Ze względu na niedeterministyczny charakter mechaniki kwantowej, każdy pomiar powoduje losowe zaburzenie cząstki. Prowadzi to do zaszumionych trajektorii, odmiennych w każdej realizacji. Taki rodzaj dynamiki opisywany jest za pomocą stochastycznych równań różniczkowych.

Głównym celem niniejszej pracy jest zaproponowanie nowego modelu ciągłego pomiaru położenia i pędu cząstki kwantowej. Model ten spełnia wymogi wyżej wspomnianej współczesnej teorii pomiaru kwantowego. Jednocześnie jest on dosyć bliski pierwotnej, rzutowej teorii. Cząstka w losowych chwilach doświadcza zaburzeń w wyniku pomiaru, a jej funkcja falowa jest rzutowana na zlokalizowany w przestrzeni położeń i pędów stan. Naturalnym wyborem jest stan gaussowski. Przyjmujemy dyskretny zbiór możliwych wyników tych pomiarów. Odpowiada to siatce punktów w przestrzeni fazowej, w których umieszczone są "detektory".

Formalnie dynamika układu opisana jest przez stochastyczne równanie Schrödingera, którego deterministycznym odpowiednikiem jest równanie Goriniego-Kossakowskiego-Sudarshana-Lindblada (GKSL) na macierz gęstości. W rachunkach numerycznych wykorzystujemy formalizm Monte-Carlo Wavefunction (MCWF), który jest jedną z metod rozwiązywania równania GKSL. Pozwala to na uzyskanie pojedynczych trajektorii kwantowych, w których ciągła i nieliniowa ewolucja przerywana jest przeskokami, czyli detekcją cząstki. Te trajektorie interpretujemy jako pojedyncze realizacje dynamiki cząstki. Przyjmując detekcje jako jedyny fizyczny sygnał dostępny obserwatorowi, opieramy na nich całą dalszą analizę.

W zaproponowanym tutaj wariancie, model posiada dwa kluczowe parametry: intensywność pomiaru oraz gęstość siatki detektorów. W zależności od tych wielkości identyfikujemy szereg reżimów dynamicznych: Badamy, w jakich warunkach obserwowane trajektorie statystycznie pokrywają się z ruchem klasycznym. W ramach symulacji obserwujemy także efekt Zenona. Wyniki numeryczne uzupełniamy tutaj rachunkami analitycznymi dla uproszczonych scenariuszy jednego i dwóch detektorów. Pozwala to na oszacowanie opóźnienia ruchu cząstki spowodowanego częstą obserwacją. Identyfikujemy także reżim, w którym średni ruch cząstki ma charakter skokowy, przechodząc od jednego do drugiego punktu pomiaru.

Poza wyznaczeniem średnich trajektorii badamy także ich rozrzut. Obliczamy dyspersję pomiarów w przestrzeni położeń i pędów, pokazując, jak wielkości te skalują się z czasem. W przybliżeniu gęstej siatki obliczamy analitycznie stałą dyfuzji oraz przedstawiamy efektywne klasyczne równania stochastyczne, które odtwarzają zaobserwowaną dynamikę. W przeciwnym scenariuszu rzadko rozmieszczonych detektorów przedstawiamy alternatywną do MCWF metodę numeryczną, pozwalającą ściśle obliczyć dynamikę zmiennych statystycznych.

Nasze rachunki dotyczą cząstki swobodnej oraz znajdującej się w zewnętrznym potencjale harmonicznym. W tym drugim przypadku, obok analogicznych rachunków dotyczących średnich trajektorii oraz dyspersji, badamy zmiany energii układu. Przedstawiamy analityczny wzór rozkładu energii w stanie początkowym oraz pokazujemy, jak zespół trajektorii termalizuje się dla długich czasów.

Zaproponowany przez nas model posiada szereg cech, które wyróżniają go względem badanych dotychczas w literaturze modeli ciągłego pomiaru. Rozważamy jednoczesny pomiar położenia i pędu, w wyniku którego układ znajduje się w określonym stanie kwantowym. W przeciwieństwie do tego, większość innych modeli rozważa monitorowanie tylko jednej zmiennej dynamicznej, mierzonej w sposób słaby – oznacza to, że działanie operatora pomiaru M nie jest tożsame z dwukrotnym pomiarem M^2.

Wykorzystanie rzutowej postaci operatorów pomiaru stanowi nie tylko nawiązanie do "klasycznej" teorii pomiaru kwantowego. Nasz opis prowadzi do modelu, którego dynamika może być badana w ramach uogólnionej teorii odnowy – klasie standardowych procesów stochastycznych. Fakt ten jest wielokrotnie wykorzystywany w tej pracy i pozwala na wyprowadzenie szeregu wyników analitycznych. Wreszcie w pracy dokonujemy szczegółowego porównania naszego modelu z popularnym w literaturze modelem "filtracyjnym". Na podstawie symulacji numerycznych wskazujemy na istotne różnice dotyczące skalowania wyżej wspomnianych funkcji dyspersji.

Continuous measurement of position and momentum of a quantum particle

Filip Gampel

Abstract

As a result of the impressive development of experimental techniques in the last decades, it is now possible to observe and control single quantum objects such as atoms or ions. Such a level of precision was unthinkable at the birth of quantum mechanics a hundred years ago. Meanwhile, quantum theory stands out from other fields of physics, among other things, in that measurement becomes a fundamental issue.

The concept of projective measurement developed by the fathers of quantum mechanics is one of the basic elements of the theory. At the same time, it is insufficient to describe the vast majority of experimental situations. During measurement, a quantum system interacts with the measuring device. A detailed description of the dynamics of the latter is usually neither desirable nor technically feasible. Therefore, it becomes necessary to describe the object of measurement within open system theory. The analysis of physically admissible mappings of such systems leads to the formalism of the positive operator valued measure (POVM) and the currently accepted, generalized notion of quantum measurement.

Describing the change of the quantum state induced by a measurement is particularly important when we are interested in measuring the same system repeatedly. Due to the indeterministic nature of quantum mechanics, each measurement causes a random perturbation of the particle. This leads to noisy trajectories, different in each realization. This kind of dynamics is described by stochastic differential equations.

The main goal of this work is to propose a new model for continuous measurement of position and momentum of a quantum particle. This model meets the requirements of the above-mentioned modern theory of quantum measurement. At the same time, it is quite close to the original projective theory. As a result of the measurement, the particle at random times experiences perturbations and its wave function is projected onto a state localized in position and momentum space. A natural choice is a Gaussian state. We assume a discrete set of possible outcomes of these measure-

ments. This corresponds to a grid of points in phase space where the "detectors" are located.

Formally, the dynamics of the system is described by the stochastic Schrödinger equation, whose deterministic counterpart is the Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) equation for the density matrix. In numerical calculations, we use the Monte-Carlo Wavefunction (MCWF) formalism, which is a method for solving the GKSL equation. This allows for obtaining single quantum trajectories in which continuous non-linear evolution is interrupted by jumps, i.e. particle detections. We interpret these trajectories as individual realizations of particle dynamics. Taking the detections as the only physical signal available to the observer, we base all further analysis on them.

In the variant proposed here, the model has two key parameters: measurement intensity and detector grid density. Depending on these quantities, we identify a number of dynamic regimes: We investigate under what conditions the observed trajectories statistically coincide with classical motion. In our simulations we also observe the Zeno effect. We supplement the numerical results here with analytical calculations for the simplified scenarios of one and two detectors. This allows an estimation of the particle motion delay caused by frequent observation. We also identify a regime in which the average position of the particle is a steplike function, moving from one measurement point to another.

In addition to determining the average trajectories, we also examine their dispersion. We calculate the dispersion of detections in position and momentum space, showing how these quantities scale with time. In the dense-grid approximation, we calculate the diffusion constant analytically and present effective classical stochastic equations that reproduce the observed dynamics. In the opposite scenario of sparsely located detectors, we present an alternative to MCWF numerical method that allows to exactly calculate the dynamics of statistical variables.

Our calculations are for a free particle and one in an external harmonic potential. In the latter case, apart from analogous calculations concerning average trajectories and dispersion, we study the change in energy of the system. We present an analytical formula for the energy distribution in the initial state and show how the ensemble of trajectories thermalizes over time.

The model proposed by us has a number of features that distinguish it from models of continuous measurement studied so far in the literature. We consider a simultaneous measurement of position and momentum, resulting in a system with a definitive

quantum state. In contrast, most other models consider only one weakly measured dynamic variable – this means that the action of the measurement operator M is not the same as measuring twice (M^2). The use of projective measurement operators is not only a reference to the "classical" theory of quantum measurement. Our description leads to a model whose dynamics can be studied within generalized renewal theory - a class of standard stochastic processes. This fact is used many times in this work and allows to derive a number of analytical results. Finally, in the paper we make a detailed comparison of our model with the "filter" approach popular in similar studies. On the basis of numerical simulations, we indicate significant differences in the scaling of the above-mentioned dispersion functions between the two approaches.

Spis treści

Struktura pracy **14**

1 Zarys historyczny **18**
1.1 Interpretacje mechaniki kwantowej 18
1.2 Droga do teorii ciągłego pomiaru kwantowego 26
1.3 Ciągły pomiar położenia i pedu 30

2 Ciągły pomiaru układów kwantowych **32**
2.1 Pomiar rzutowy 34
2.2 Pomiar uogólniony 36
2.3 Pomiar ciągły 40
2.3.1 Ewolucja funkcji falowej metodą Monte Carlo 42
2.3.2 Stochastyczne równania ruchu 43

3 Wielokrotny pomiaru położenia i pędu **46**
3.1 Operatory przeskoku 46
3.2 Cząstka swobodna 51
3.2.1 Jeden detektor 51
Przypadki graniczne 52
Przypadek ogólny 54
3.2.2 Dwa detektory 56
3.2.3 Szereg detektorów 61
Przybliżenie rzadkich kliknięć 63
Alternatywna metoda symulacji dynamiki 64
Średnie położenie w przypadku dowolnej intensywności pomiaru 66
Dyspersja 68
Porównanie z alternatywnym modelem pomiaru 71
3.3 Cząstka w potencjale harmonicznym 75
Dyspersja – heurystyka 75
Dyspersja – model klasyczny 81
Modulacja dyspersji 81
Rozważania energetyczne 82

4 Podsumowanie i perspektywy **86**

Spis rysunków

3.1 Stochastyczna ewolucja funkcji falowej cząstki kwantowej w dwóch wymiarach . . . 50
3.2 Czas ucieczki od pojedynczego detektora T_{esc} . . . 56
3.3 Zależność czasowa warunkowej intensywności detekcji w jednym z dwóch detektorów . . . 58
3.4 Statystyka detekcji dla cząstki monitorowanej przez dwa detektory . . 60
3.5 Charakterystyczne funkcje intensywności pomiaru dla cząstki obserwowanej przez szereg detektorów . . . 62
3.6 Średnie położenie cząstki monitorowanej przez rzadką sieć detektorów jako funkcja czasu . . . 67
3.7 Klasyczny model rozrzutu pomiarów pędów i położeń . . . 70
3.8 Porównanie przeskokowego i filtracyjnego modelu pomiaru . . . 73
3.9 Przykładowa trajektoria cząstki w potencjale harmonicznym w przestrzeni fazowej . . . 76
3.10 Średnie trajektorie dla cząstki w potencjale harmonicznym . . . 77
3.11 Dyspersja pomiarów położenia cząstki w oscylatorze harmonicznym jako funkcja czasu . . . 78
3.12 Stała dyfuzji dla cząstki w oscylatorze harmonicznym jako funkcja intensywności pomiaru i odległości między detektorami . . . 80
3.13 Rozkład energii dla zespołu trajektorii cząstki w potencjale harmonicznym . . . 83

Struktura pracy

Rozdział 1.

Pierwszy rozdział zawiera zarys historyczny badań związanych z problematyką ciągłego pomiaru w mechanice kwantowej. Wstępna część tego rozdziału poświęcona jest zagadnieniu tzw. interpretacji mechaniki kwantowej. Jest to problem z pogranicza fizyki i filozofii, ma jednak pewne powiązania z tematem niniejszej pracy. Po pierwsze, poszczególne interpretacje stanowią próby rozwiązania problemu pomiaru, czyli odpowiedzi na pytanie, dlaczego pomiar zdaje się odgrywać tak wyjątkową rolę w mechanice kwantowej. Po drugie, teoria ciągłej obserwacji układu kwantowego jest matematycznie blisko spokrewniona z szeregiem tzw. modeli obiektywnego kolapsu, które należą do konkurujących interpretacji QM. Pokrewieństwo jest także historyczne, gdyż spekulatywne modele obiektywnego kolapsu poprzedziły bardziej praktycznie zorientowaną teorię trajektorii kwantowych.

W dalszym ciągu skrótowo opisujemy, w jaki sposób różne osiągnięcia z dziedziny teoretycznej i doświadczalnej doprowadziły do współczesnej teorii kwantowego pomiaru. Wymienione są tutaj prace ojców teorii kwantowej, teoria dekoherencji kwantowej oraz uogólnione pojęcie pomiaru w ramach teorii miary dodatnio określonych operatorów. Przedstawiamy także przełomowe doświadczenia prowadzące do obserwacji pojedynczych układów kwantowych. Omawiamy kwestię przeskoków kwantowych, które nie tylko przyciągają uwagę doświadczalników, ale pojawią się także jako narzędzie teoretyczne. Ta dość złożona historia prowadzi nas do teorii układów otwartych oraz modeli, w ramach których po raz pierwszy pojawiają się trajektorie kwantowe.

Rozdział kończymy krótkim przeglądem literatury ściśle związanej z problemem ciągłej obserwacji układu kwantowego. W szczególności zwracamy uwagę na publikacje poświęcone – podobnie jak niniejsza praca – pomiarowi położenia i pędu cząstki kwantowej, szkicując różnorodne aspekty tych badań.

Rozdział 2.

W drugim rozdziale przedstawiamy teoretyczne podwaliny badań, których dotyczy niniejsza rozprawa. Jest to przede wszystkim rzutowy model pomiaru, rozwinięty u początków mechaniki kwantowej, który do dzisiaj – choćby w zarysach – stanowi element każdego wprowadzenia do przedmiotu.

Teorię pomiaru rzutowego przedstawiamy za pomocą równań, które pozwalają na łatwe porównanie ze znacznie szerszym pojęciem pomiaru uogólnionego, co pozwala na realistyczny opis różnorodnych scenariuszy doświadczalnych. Ta część zawiera zarówno szkic źródeł teorii w abstrakcyjnych badaniach dotyczących odwzorowań całkowicie dodatnich, jak i prosty przykład ilustrujący jego zastosowanie.

Ostatnia część tego rozdziału poświęcona jest pomiarom wykonywanym wielokrotnie. Wprowadzamy tutaj równanie Lindblada służące do opisu układów otwartych oraz numeryczną metodę Monte Carlo Wavefunction, z której korzystamy w wielu rachunkach. Wreszcie przedstawiamy stochastyczne równanie Schrödingera, czyli formalizm matematyczny pozwalający na opis trajektorii kwantowych oraz definicję naszego modelu.

Rozdział 3.

Rozdział ten wprowadza nowy model ciągłego pomiaru położenia i pędu cząstki kwantowej. Zawiera szereg wyników numerycznych, uzupełnionych przez rachunki analityczne. Pierwsza jego część zawiera definicję modelu. Posługując się formalizmem przedstawionym w rozdziale 2., wprowadzamy najpierw operatory pomiaru, które są operatorami rzutującymi na stany gaussowskie, nazywane przez nas "detektorami". Zapisujemy fundamentalne równania opisujące dynamikę i definiujemy kluczowe parametry modelu.

Druga część przedstawia badany w ramach modelu przypadek swobodnej cząstki kwantowej. Nasz opis uporządkowany jest według zasady "od szczegółu do ogółu": rozpoczynamy od najprostszego przypadku monitorowania przez pojedynczy detektor, i badamy problem ucieczki cząstki z jego zasięgu. Następnym zagadnieniem jest problem cząstki monitorowanej przez dwa detektory, co można uznać za element składowy każdej bardziej skomplikowanej dynamiki. W obu scenariuszach przedstawiamy najpierw przypadki graniczne, a następnie dyskutujemy ogólną dynamikę. Naprowadza nas to na pytanie o efekt Zenona, czyli ewentualnego spowolnienia dynamiki cząstki w wyniku częstej obserwacji. Analizę przeprowadzamy dla dowolnie długiego szeregu detektorów. Badamy także statystyczną charakterystykę dynamiki w zależności od parametrów symulacji. Przedstawiamy alternatywną metodę nu-

merycznego rozwiązania problemu i badamy dyspersję, czyli rozrzut poszczególnych trajektorii wokół średniej. W końcu porównujemy nasze wyniki z innym spotykanym w literaturze modelem.

Trzecia część rozdziału dotyczy cząstki w potencjale harmonicznym. Jest to przypadek szczególny, ponieważ stawia na równi obie mierzone w naszym modelu obserwable – położenie i pęd. Ponownie badamy statystyczne wielkości takie jak średnia trajektoria oraz dyspersja. Przedstawiamy także zmianę całkowitej energii układu.

Rozdział 4.

Streszczamy główne wyniki naszej pracy oraz szkicujemy szereg pomysłów dalszych badań.

Rezultaty dotyczące modelu gaussowskich operatorów rzutowych opublikowane zostały w dwóch pracach:

1. Filip Gampel, Mariusz Gajda
   Continuous simultaneous measurement of position and momentum of a particle
   Physical Review A **107**, 012420 (2023)

2. Filip Gampel, Mariusz Gajda
   On repeated measurements of a quantum particle in a harmonic potential
   Acta Physica Polonica A **143** (6), s. 131 (2023)

W niniejszej rozprawie zostały one uzupełnione szeregiem dotychczas nieopublikowanych wyników.

Rozdział 1

Zarys historyczny

Od około stu lat mechanika kwantowa stanowi fundamentalną teorię świata mikroskopowego – molekuł, atomów i cząstek subatomowych. Zasady opracowane w latach 20. XX. wieku przez Bohra, Borna, Diraca, Heisenberga, Pauliego, Schrödingera i innych zachowują ważność po dziś dzień. Trudno przecenić ich znaczenie, obejmujące swoim wpływem niemal wszystkie dziedziny fizyki, a także pozostałe dyscypliny przyrodnicze jak chemia i biologia. Jednak równie intrygujące co ów zwycięski pochód są spory, jakie toczą się wokół podstaw teorii. Od samych początków budziła ona kontrowersje, burząc dotychczas niezachwiane przekonania odnośnie świata fizycznego. Ale to nie sam fakt zaskakujących odkryć napędza debatę. Matematyczny formalizm, na którym opiera się teoria, jest jasny, jednak przepaść jaka dzieli jego pojęcia od świata naszych intuicji jest na tyle duża, że mechanika kwantowa stała się pierwszą fizyczną teorią domagającą się swojej własnej "interpretacji". Pod hasłem tym kryje się szereg rywalizujących ze sobą poglądów, funkcjonujących na pograniczu fizyki i filozofii. Po dzień dzisiejszy żaden z nich nie zyskał powszechnej akceptacji wśród uczonych. Kluczowym elementem poszczególnych interpretacji jest rola, jaką odgrywa w nich pomiar układu kwantowego. Dlatego na początku tej pracy postaramy się streścić najbardziej istotne stanowiska w tej dyskusji.

1.1 Interpretacje mechaniki kwantowej

Tak zwane interpretacje mechaniki kwantowej można z grubsza podzielić na teorie epistemiczne i ontyczne, zgodnie z tym, na ile uznajemy wielkości takie jak funkcja falowa za coś "realnego" i "obiektywnego". Według interpretacji epistemicznych, celem mechaniki kwantowej (albo każdej innej teorii naukowej) jest przewidywanie wyników doświadczeń. Pytania o "istotę" albo "rzeczywisty stan" elementów świata

fizycznego uznawane są jako nieistotne lub wręcz nienaukowe. Takie rozumowanie jest bliskie filozofii pozytywizmu logicznego, rozwiniętej przez Koło Wiedeńskie w pierwszej połowie XX wieku. Wielokrotnie w jej duchu wypowiadał się jeden z ojców mechaniki kwantowej, Niels Bohr: *In our description of nature the purpose is not to disclose the real essence of the phenomena but only to track down, so far as it is possible, relations between the manifold aspects of our experience.*[1][Boh34, s. 18] *Physics is to be regarded not so much as the study of something a priori given, but as the development of methods for ordering and surveying human experience.*[2] [Boh87, s. 10]

Interpretacja kopenhaska Poglądy Bohra stanowią podstawę tak zwanej interpretacji kopenhaskiej, która przez dekady pełniła funkcję ortodoksyjnej wykładni przedmiotu. Wiele klasycznych podręczników mniej lub bardziej jawnie odwołuje się do jej założeń (np.[Neu32; LL58; Per93]). Niestety nie istnieje jeden ścisły zbiór postulatów składających się na interpretację kopenhaską – próbując ją zdefiniować, różni autorzy wprowadzali wręcz sprzeczne ze sobą opisy [Per02]. Wiele wskazuje na to, że sama nazwa została ukuta przez blisko współpracującego z Bohrem Heisenberga dopiero w latach 50. [Hei58]. Jednak nawet Heisenberg i Bohr w wielu kluczowych kwestiach nie byli ze sobą zgodni [Cam07]. Poniżej postaramy się przedstawić wspólny mianownik poglądów zwolenników szkoły kopenhaskiej.

Interpretacja kopenhaska uznaje fundamentalny indeterminizm mechaniki kwantowej. Wynik pomiaru jest losowym zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo zadane jest przez regułę Borna. Aby zdefiniować pomiar, konieczne jest rozróżnienie układu mierzonego oraz instrumentu pomiarowego. Stąd charakterystyczną cechą różnych wariantów interpretacji kopenhaskiej jest podział układów uczestniczących w procedurze pomiarowej na "kwantowe" i "klasyczne". Podział ten (nazywany cięciem Heisenberga) z pewnością jest w pewnym stopniu arbitralny. Można rozważyć dowolnej długości ciąg oddziaływań (np. układ mikroskopowy – instrument pomiarowy – układ sensoryczny doświadczalnika – jego system nerwowy i mózg) składający się na pomiar, jednak u jego końca musi nastąpić przejście do opisu klasycznego: *In the system to which the quantum mechanical formalism is applied, it is of course possible to include any intermediate auxiliary agency employed in the measuring process [...] Some ultimate measuring instruments [...] must always be described entirely on classical lines, and consequently kept outside the system subject to quantum mechanical*

[1]W naszym opisie przyrody nie chodzi o ujawnienie prawdziwej istoty zjawisk, a jedynie o wyśledzenie, na ile to możliwe, relacji między rozmaitymi aspektami naszego doświadczenia.

[2]Fizykę należy postrzegać nie tyle jako badanie czegoś zadanego a priori, ale jako rozwój metod służących porządkowaniu i badaniu ludzkiego doświadczenia.

treatment.[3] [Kal96] Według Bohra, wyróżnienie układu klasycznego nie następuje na gruncie jakichś szczególnych cech fizycznych, ale jest kwestią semantyczną. Wynika ono z tego, że doświadczamy i komunikujemy nasze doświadczenia jedynie za pośrednictwem klasycznych pojęć: *However far the [quantum] phenomena transcend the scope of classical physical explanation, the account of all evidence must be expressed in classical terms. The argument is simply that by the word 'experiment' we refer to a situation where we can tell others what we have done and what we have learned and that, therefore, the account of the experimental arrangement and the results of the observations must be expressed in unambiguous language with suitable application of the terminology of classical physics.*[4] Jednocześnie większość wariantów interpretacji kopenhaskiej odrzucą jakąkolwiek szczególną rolę obserwatora w procesie pomiaru. Co prawda funkcja falowa, jaką należy opisać układ, z zasady pełni rolę jedynie matematycznego narzędzia przy obliczaniu prawdopodobieństw według reguły Borna, jednak jest ona jednoznacznie zdefiniowana przez układ oraz procedurę, zgodnie z którą został przygotowany, i w tym sensie obiektywna [Per93]. Jeszcze wyraźniej zaznaczają to Landau i Lifszic: *"Obiekt klasyczny" nazywamy zwykle "przyrządem", a proces jego oddziaływania z elektronem – "pomiarem". Należy jednak jak najbardziej zdecydowanie podkreślić, że nie mamy bynajmniej przy tym na myśli takiego procesu "pomiaru", w którym uczestniczy fizyk-obserwator. W mechanice kwantowej przez pomiar rozumiemy wszelki proces wzajemnego oddziaływania między obiektami klasycznymi i kwantowymi, który zachodzi niezależnie od obserwatora.* [LL58, s. 13] Zmusza ich to do uznania logicznej zależności mechaniki kwantowej od fizyki klasycznej: *Zbudowanie mechaniki kwantowej jest z zasadniczych powodów niemożliwe bez odwołania się do mechaniki klasycznej.* [ibid.]

Relacyjna mechanika kwantowa Szereg nowszych interpretacji epistemicznych postuluje bardziej subiektywny charakter funkcji falowej. Według relacyjnej interpretacji zaproponowanej przez Rovelliego w latach 90.[Rov96], dwóch obserwatorów może dać różne odpowiedzi na pytanie, czy w danym układzie nastąpił kolaps. Jako wzór przyjmuje on szczególną teorię względności, która zniosła pojęcia takie jak absolutny czas lub jednoczesność zdarzeń fizycznych. W podobny sposób należy odrzucić twierdzenie, że istnieje jakiś jednoznaczny stan danego układu kwantowego.

[3] W układzie, względem którego stosujemy formalizm mechaniki kwantowej, możliwe jest oczywiście włączenie dowolnych układów pośrednich w procesie pomiarowym [...] Ostateczne przyrządy pomiarowe [...] muszą być zawsze opisywane w całości w sposób klasyczny, a co za tym idzie, wyłączone z opisu kwantowego.

[4] Jakkolwiek dalece zjawiska [kwantowe] wykraczają poza zakres fizyki klasycznej, opis wszystkich dowodów eksperymentalnych musi być wyrażony w pojęciach klasycznych. Argument polega po prostu na tym, że przez słowo „eksperyment" odnosimy się do sytuacji, w której możemy powiedzieć innym, co zrobiliśmy i czego się nauczyliśmy, a zatem opis układu eksperymentalnego i wyniki obserwacji muszą być wyrażone w jednoznacznym języku z odpowiednim zastosowaniem terminologii fizyki klasycznej.

Funkcja falowa opisuje jedynie relację między układem a obserwatorem. Należy przy tym zwrócić uwagę, że "obserwator" nie jest w żaden sposób wyróżniony fizycznie: podobnie jak w STW, jest on jedynie układem odniesienia dla wyznaczenia stanu kwantowego. Dlatego mówienie o funkcji falowej ma sens wtedy (i tylko wtedy) gdy sprecyzujemy, względem jakiego oddziałującego z nią układu jest rozważana. Mechanika kwantowa sformułowana w ten sposób w ogóle nie rozróżnia obserwatora i tego co mierzone. Wszystkie układy są równoważne, a przedmiotem teorii jest określenie, jaką informację mają one o sobie nawzajem.

QBism Kolejną szkołą uznającą radykalnie subiektywny charakter funkcji falowej oraz jej kolapsu jest QBism (od angielskiego: *quantum bayesianism*) rozwinięty przez Cavesa, Fuchsa i Schacka w latach 2000 [Fuc10]. Według QBism'u, funkcja falowa opisuje jedynie subiektywny stan wiedzy użytkownika teorii kwantowej o układzie. Reguła Borna służy jako rozszerzenie zasad wnioskowania bayesowskiego, pozwalających na określenie prawdopodobieństw zdarzeń kwantowych. U podstaw tego poglądu leży personalistyczna koncepcja prawdopodobieństwa, zgodnie z którą jest ono miarą zaufania racjonalnie postępującego podmiotu w to, że dane zdarzenie nastąpi (zaliczają się do tego także prawdopodobieństwa 0 i 1). Wynika stąd, że kolaps funkcji falowej jest niczym innym, jak skokową zmianą wiedzy obserwatora o układzie. Podobnie jak w interpretacji relacyjnej, nie ma więc sensu rozważanie mechaniki kwantowej bez uwzględnienia obserwatorów, którzy jednak tym razem są świadomymi użytkownikami mechaniki kwantowej. *The "reduction of the wave packet" does take place in the consciousness of the observer, not because of any unique physical process which takes place there, but only because the state is a construct of the observer and not an objective property of the physical system.*[5] [Har68]

Many Worlds Przejdziemy teraz do teorii uznających funkcję falową za obiektywną, fizyczną wielkość. Interpretacje te można podzielić zależnie od tego, czy kolaps funkcji falowej jest w nich procesem fizycznym. Najpopularniejszą teorią wykluczającą kolaps jest zaproponowana przez Everetta w 1957 interpretacja wielu światów (MWI – ang. Many Worlds Interpretation). Nazwa ta pojawiła się jednak później, a w oryginalnej pracy [Eve57] Everett mówi o "formalizmie stanów względnych". Formalizm ten ma pewne podobieństwo do interpretacji relacyjnej Rovelliego. Zgadzają się one co do tego, że podukładom nie da się przypisać jednoznacznie funkcji falowej, jeżeli nie uwzględnimy całego otoczenia z którym oddziałują. Według interpretacji wielu światów "absolutne" funkcje falowe przysługują natomiast układom izolowanym. Ich ewolucję całkowicie determinuje równanie Schrödingera. W szczególności

[5] „Kolaps funkcji falowej" ma miejsce w świadomości obserwatora nie z powodu jakiegoś unikalnego procesu fizycznego, który tam zachodzi, ale tylko dlatego, że stan jest konstruktem obserwatora, a nie obiektywną właściwością układu fizycznego.

można rozważyć funkcję falową wszechświata – według Everetta jest to fundamentalna wielkość, z której (przynajmniej teoretycznie) można by wyprowadzić wszystkie zjawiska fizyczne. Rozważmy proces pomiaru dokonanego przez instrument A na układzie S. Wynikami pomiaru mogą być "1" lub "0". Niech $|0\rangle$ i $|1\rangle$ oznaczają stany układu S, a $|A$ wskazuje $0\rangle$ i $|A$ wskazuje $1\rangle$ stany instrumentu. Z początku S znajduje się w stanie $a|0\rangle + b|1\rangle$, gdzie a i b są dowolnymi amplitudami. Pomiar, a zarazem domniemany kolaps jest procesem, w którym uprzednio izolowane układy A i S wchodzą w oddziaływanie. Ewolucja unitarna doprowadza następnie do tego, że układ łączony $A+S$ opisany jest przez superpozycję $a|A$ widzi $0\rangle|0\rangle+b|A$ widzi $1\rangle|1\rangle$. Następuje więc rozgałęzienie, w ramach którego wszystkie możliwe wyniki pomiaru zostają zrealizowane. Poszczególne gałęzie, czyli składowe z powyższej superpozycji, popularnie nazywane są "światami", mimo że ściśle mówiąc, cały czas istnieje *jeden* wszechświat, opisany przez uniwersalną funkcję falową. Ponieważ równanie Schrödingera jest liniowe, światy–gałęzie nie oddziałują między sobą. Interpretacja Everetta jest więc w pewnym sensie interpretacją minimalną, postulującą ograniczenie się jedynie do unitarnej ewolucji. Rodzą się z tego jednak pewne problemy: skoro reguła Borna nie jest już fundamentalnym postulatem, musi dać się wyprowadzić z pozostałych zasad mechaniki kwantowej. Powstaje również pytanie, jak rozumieć prawdopodobieństwa, przypisywane w praktyce różnym zdarzeniom kwantowym.

Mechanika Bohma Pośród teorii uznających fizyczność funkcji falowej istnieje szereg alternatyw wobec interpretacji wielu światów. W przeciwieństwie do MWI proponują one *rozszerzenia* mechaniki kwantowej. Jedną z najstarszych jest teoria fali pilotującej, zaproponowana przez de Broglie'a [BV09, s. 30 i n.] i rozwinięta przez Bohma [Boh52a; Boh52b]. Poza funkcją falową postuluje ona konfigurację układu kwantowego oznaczoną przez współrzędne q_k. Podobnie jak w mechanice klasycznej i standardowej mechanice kwantowej, istnieje wiele możliwych wyborów przestrzeni konfiguracji. W przypadku zbioru cząstek mogą to być ich przestrzenne położenia, a w przypadku teorii pola funkcje $q(x)$ oznaczające konfigurację pola. Dla przykładu będziemy mówić o układzie N cząstek. Współrzędne ewoluują zgodnie z równaniem

$$m_k \frac{dq_k}{dt}(t) = \hbar \operatorname{Im}\left(\frac{\nabla_k \psi}{\psi}\right)(q,t), \tag{1.1}$$

gdzie m_k jest masą k-tej cząstki, a q jest wektorem wszystkich współrzędnych q_k. ψ jest funkcją falową, ewoluującą zgodnie ze standardowym równaniem Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 \psi(q,t) + V(q)\psi(q,t) \tag{1.2}$$

Równanie (1.1) ma intuicyjną interpretację: prędkość cząstki k zadana jest przez przypisany jej, normalizowany prąd prawdopodobieństwa: $dq_k/dt = j_k(q,t)/|\psi(q,t)|^2$. Z równań tych bezpośrednio wynika, że mechanika Bohma jest teorią nielokalną: prędkość cząstki k zależy przez ψ od równoczesnej pozycji wszystkich innych cząstek w układzie. Funkcja $\psi(q,t)$ w tym kontekście nazywana jest także *falą pilotującą*. "Problem pomiaru" w mechanice bohmowskiej nie istnieje, ponieważ każdy pomiar (w ramach właściwej sobie dokładności) odkrywa realną i obiektywną konfigurację układu w danym momencie. Reguła Borna nie jest tu postulatem, ale prawem statystycznym, wynikającym z tego, że układy dążą do hipotetycznej "równowagi kwantowej", w analogii do praw mechaniki statystycznej. Kolaps funkcji falowej jest w teorii de Broglie'a-Bohma zjawiskiem fenomenologicznym: następuje on tylko z punktu widzenia obserwatora, gdy rozważa on podukład i przypisuje mu "względną" funkcję falową. Natomiast nie jest możliwy kolaps "właściwej" globalnej funkcji falowej. Ma to pewne podobieństwo do interpretacji wielu światów, ponieważ w obu przypadkach teoria opiera się na uniwersalnej funkcji falowej, tworzącej zgodnie z opisanym wyżej mechanizmem światy równoległe. W kontekście teorii Bohma należy je uznać za "światy fikcyjne", podczas gdy konfiguracja $q(t)$ służy jako wskaźnik jedynej "rzeczywistej" historii. Mechanika Bohma jest przykładem tzw. teorii ukrytych zmiennych (ang. hidden variable theory, HVT) – w tym przypadku są to współrzędne q_k. Istnieje szereg twierdzeń zawężających klasę fizycznych HVT: jedne z najsłynniejszych to twierdzenie Bella [Bel64] oraz twierdzenie Kochena-Speckera [KS67]. Jak argumentuje sam Bell, nie stoją one jednak w sprzeczności z mechaniką Bohma [Bel82]. Od lat 90. daje się zaobserwować wzmożone zainteresowanie mechaniką bohmowską, co doprowadziło do prac dążących do uogólnienia teorii z uwzględnieniem m.in. spinu, szczególnej teorii względności, kwantowej teorii pola i zakrzywionej czasoprzestrzeni [Boh06].

Teorie obiektywnego kolapsu Wśród interpretacji ontycznych można wyróżnić wreszcie teorie obiektywnego kolapsu. W przeciwieństwie do wielu przedstawionych wyżej formalizmów, których falsyfikowalność bywa sporna, są to teorie fizyczne w ścisłym tego słowa znaczeniu: postulują one fizyczny mechanizm, który ma prowadzić do kolapsu funkcji falowej. Pierwsza taka teoria zaproponowana została przez Ghirardiego, Riminiego i Webera w 1986 [GRW86]. Rozważmy funkcję falową układu N cząstek $\psi(x_1,\ldots,x_N)$. Według teorii GRW, funkcja ta ewoluuje zgodnie ze zwyczajnym równaniem Schrödingera, przy czym co jakiś czas doświadcza losowo spontanicznego kolapsu

$$|\psi(x_1,\ldots,x_N)\rangle \to \frac{|L_i(x)|\psi(x_1,\ldots,x_N)\rangle}{||L_i(x)|\psi(x_1,\ldots,x_N)\rangle|} \tag{1.3}$$

$L_i(x)$ jest operatorem lokalizującym i-tą cząstkę wokół x. Zazwyczaj przyjmuje się postać

$$L_i(x) = \left(\frac{1}{\pi r_C^2}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{(q_i-x)^2}{2r_C^2}}, \tag{1.4}$$

gdzie q_i jest operatorem położenia dla i-tej cząstki, a r_C stałą charakteryzującą szerokość lokalizacji. Lokalizacja każdej cząstki następuje niezależnie od pozostałych ze średnią częstotliwością λ_{GRW}. Rozkład lokalizacji w czasie jest poissonowski, a miejsce lokalizacji x jest losowane z rozkładu $P_i(x) = \langle\psi|L_i^\dagger(x)L_i(x)|\psi\rangle$. Model wprowadza więc dwie nowe fundamentalne stałe λ_{GRW} i r_C. Łatwo dowieść w ramach teorii GRW tzw. efektu amplifikacji: jeśli w ciele stałym składającym się z N cząstek każda doświadcza lokalizacji z częstotliwością λ_{GRW}, to środek masy tego układu lokalizowany jest z częstotliwością $\Lambda = N\lambda_{GRW}$. Postulowana wartość λ_{GRW} musi być więc na tyle duża, aby lokalizacja dla obiektów makroskopowych następowała niemal natychmiast, i na tyle mała, aby w przypadku obiektów kwantowych było to zdarzenie niemal pomijalne. Wartości przyjęte w [GRW86] to $\lambda_{GRW} = 10^{-16}\mathrm{s}^{-1}$ i $r_C = 10^{-7}\mathrm{m}$. Model GRW łączy więc w prosty sposób zjawiska kwantowe w skali mikro z mechaniką klasyczną dla obiektów makroskopowych. Dodatkowo w przypadku pomiaru odtwarza on znaną ze standardowej mechaniki kwantowej regułę Borna oraz kolaps funkcji falowej. Dzieje się to jednak za cenę wprowadzenia ad hoc szumu do fundamentalnych równań dynamiki układów kwantowych. Ponadto model GRW posiada szereg innych problematycznych cech: nie uwzględnia on identycznych cząstek, nie jest relatywistyczny i prowadzi do złamania zasady zachowania energii.

Stanowiło to motywację do rozwinięcia bardziej zaawansowanych modeli spontanicznego kolapsu. Jednym z najpopularniejszych jest model ciągłej spontanicznej lokalizacji (ang. continuous spontaneous localization, CSL) [Pea89; GPR90]. Jego dynamika opisana jest przez stochastyczne równanie Schrodingera [PS94]

$$\begin{aligned} d|\psi_t\rangle = \Bigg[-\frac{i}{\hbar}H dt + \frac{\sqrt{\lambda_{CSL}}}{m_0}\int d\mathbf{x}\,[M(\mathbf{x}) - \langle M(\mathbf{x})\rangle_t]dW_t(\mathbf{x}) \\ - \frac{\lambda_{CSL}}{2m_0^2}\int d\mathbf{x}\,[M(\mathbf{x}) - \langle M(\mathbf{x})\rangle_t]^2 dt\Bigg]|\psi_t\rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pierwszy wyraz odpowiada za standardową unitarną ewolucję, natomiast dwa kolejne prowadzą do lokalizacji w przestrzeni położeń, która w przeciwieństwie do modelu GRW nie jest skokowa, ale ciągła w czasie. $dW_t(\mathbf{x})$ jest polem szumu, zadanym przez proces Wienera w każdym punkcie $\mathbf{x}$. λ_{CSL} jest analogicznym do λ_{GRW} parametrem zadającym intensywność lokalizacji, a m_0 masą referencyjną (np. masą nukleonu).

$M(\mathbf{x})$ jest rozmytym operatorem gęstości masy:

$$M(\mathbf{x}) = \sum_j m_j N_j(\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

gdzie m_j to masa j-tej cząstki a

$$N_j(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \psi_j^\dagger(\mathbf{y}) \psi_j(\mathbf{y}) \tag{1.7}$$

z operatorami kreacji $\psi_j^\dagger(\mathbf{y})$ i anihilacji $\psi_j(\mathbf{y})$ cząstki w $\mathbf{y}$ oraz funkcją rozmycia

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} r_C)^3} e^{-\mathbf{x}^2/2r_C^2}. \tag{1.8}$$

Model CSL pozwala na opis nierozróżnialnych cząstek. Istnieje także jego rozszerzenia dysypatywne, które zapobiega nieograniczonemu przyrostowi energii [SB15].

Modele takie jak GRW i CSL nie wyjaśniają jakie jest źródło szumu generującego lokalizację cząstek kwantowych. Inaczej przedstawia się model Diósiego-Penrosa, w którym za kolapsem funkcji falowej stoi oddziaływanie grawitacyjne. Został on rozwinięty w późnych latach 80. przez Diósiego [Dió87; Dió89]. Postuluje on równanie formalnie identyczne z 1.5, przy czym w miejsce parametru λ_{CSL}/m_0^2 podstawia on $G/\hbar$. Tym samym amplituda pola szumu generującego lokalizację powiązana jest z potencjałem Newtonowskim w tym punkcie. Penrose [Pen96] zaproponował nieco inne rozumowanie: Rozważmy superpozycję dwóch stanów kwantowych, oznaczonych przez a i b, odpowiadających różnym dystrybucjom masy lub energii. Intuicyjnie spodziewamy się, że stan taki będzie tym mniej stabilny, im większa będzie rozbieżność między oboma rozkładami – odpowiada to codziennemu doświadczeniu, że przedmioty makroskopowe nie mogą być "w dwóch miejscach na raz". W przybliżeniu Newtonowskim, róznica energii między nimi wynosi

$$\Delta E_G = \frac{1}{G} \int d\mathbf{r} \left(g_a(\mathbf{r}) - g_b(\mathbf{r}) \right)^2, \tag{1.9}$$

gdzie $g_i(\mathbf{r})$ jest przyspieszeniem grawitacyjnym w $\mathbf{r}$. Prowadzi to do oszacowania czasu rozpadu takiego stanu kwantowego $\tau_G = \hbar/\Delta E_G$. Z pominięciem czynników numerycznych jest to czas identyczny do czasu lokalizacji wynikającego z modelu Diósiego. Stosunkowo niedawny przegląd modeli obiektywnego kolapsu pod kątem doświadczalnej weryfikacji znajduje się w [Bas+13].

Dekoherencja kwantowa W 1970 roku Zeh opublikował pracę dotyczącą interpretacji pomiaru w mechanice kwantowej [Zeh70]. Nieświadomy prac Everetta, zaproponował w niej teorię podobną do interpretacji wielu światów. Publikacja była

jednak nowatorska pod innym względem: zawierała historycznie pierwszy model dekoherencji kwantowej, czyli utraty przez układ cech typowo kwantowych i przejścia do zachowania klasycznego. Praca Zeha pozostała zasadniczo niezauważona przez ponad 10 lat, do czasu przełomowych badań Żurka [Zur81; Zur82]. W pracach tych postuluje on dla każdego realistycznego instrumentu pomiarowego istnienie tzw. bazy wskaźnika (ang. pointer basis). Jest to baza przestrzeni Hilberta miernika, wyróżniona fizycznie ze względu na jego konstrukcję. W uproszczonym przypadku, gdy dynamika własna instrumentu pomiarowego jest pomijalna, są to stany własne hamiltonianu oddziaływania instrumentu z otoczeniem. W ogólności te stany wskaźnikowe (pointer states) po krótkim czasie stają się ortogonalne i stabilne, a stan instrumentu zadany jest przez ich mieszaninę. Teoria Żurka nie ogranicza się jednak do sytuacji pomiarowych w wąskim tego słowa rozumieniu. Ma ona na gruncie mechaniki kwantowej ogólnie wyjaśniać dlaczego świat makroskopowy zachowuje się klasycznie. Tak więc każdemu układowi klasycznemu w wyniku jego oddziaływania z otoczeniem możemy przypisać bazę wskaźnika. Proces ten nazywany jest "einselection" (ang. enviromentally induced selection). Cała teoria, rozwijana przez Żurka i współpracowników przez kolejne dekady, otrzymała nazwę "kwantowego darwinizmu" [Zur03; Zur09]. Stanowi ona istotny wkład w wyjaśnienie powiązań fizyki kwantowej i klasycznej. Pozostaje jednak sporne, na ile rozwiązuje ona problem pomiaru i pytania o kolaps funkcji falowej [Leg02; Kas14].

1.2 Droga do teorii ciągłego pomiaru kwantowego

Pomiar rzutowy Historię teorii pomiarów kwantowych można podzielić na dwa okresy. Pierwszy z nich pokrywa się z narodzinami teorii w pierwszej połowie XX. wieku. Pojęcie "kolapsu" lub "redukcji" paczki falowej zostało wprowadzone przez Heisenberga [Hei27; Hei30]. Za pierwsze pełną teorię pomiaru można uznać omówienie Diraca w jego książce z 1930 roku [Dir30]. Z większym rygorem matematycznym kwestie te podjął dwa lata później von Neumann w podręczniku [Neu32]. Zasadniczo zakończyło to formalizację tak zwanej rzutowej teoria pomiaru, która do dzisiaj uznawana jest za fundamentalny element teorii kwantowej. Za wyjątek można uznać opublikowaną w 1951 pracę Lüdersa w której zaproponował on alternatywny do teorii von Neumanna opis pomiaru obserwabli o zdegenerowanym widmie [Lüd50]. Poza tym jednak, po pionierskich pracach z lat 30. teoria pomiaru kwantowego nie skupiała zbyt dużego zainteresowania, pojawiając się jedynie w kontekście debat wokół interpretacji mechaniki kwantowej, które streściliśmy w powyższych akapitach. Przyczynę można upatrywać w ówczesnych możliwościach fizyki doświadczalnej: pomiary zjawisk kwantowych przeprowadzane były z regule na zespołach wielu cząstek albo prowadziły do zniszczenia układu. Pytanie o "stan po pomiarze" pozostawało

więc kwestią ściśle akademicką. Popularnością cieszył się sformułowany przez Borna pogląd, według którego twierdzenia mechaniki kwantowej dotyczą jedynie zespołów statystycznych jednakowo przygotowanych układów, a nie pojedynczych realizacji doświadczalnych [Bor26].

Pomiar uogólniony – POVM Sytuacja zaczęła zmieniać się, gdy w latach 60. i 70. szereg fizyków matematycznych zaczął badać, jak uogólnić teorię, aby uwzględniała pomiary niedoskonałe. Prace Daviesa [Dav76] i Krausa [Kra83] doprowadziły do sformułowania teorii miary dodatnio określonych operatorów (ang. positive operator valued measure, POVM), która stanowi podstawę wszystkich współczesnych modeli pomiaru w mechanice kwantowej (więcej o POVM w rozdziale 2.2 niniejszej pracy).

Obserwacje pojedynczych układów kwantowych – przeskoki kwantowe Impuls teoretyczny szedł w parze z postępami w technice doświadczalnej, która na przełomie lat 70. i 80. doprowadziła do eksperymentów na pojedynczych obiektach kwantowych. Pierwsze takie doświadczenia przeprowadzane były na jonach w pułapce optycznej [Neu+78]. Doświadczenia wznowiły zainteresowanie kwestią, która była przedmiotem kontrowersji już we wczesnych dniach mechaniki kwantowej. Jednym z najwcześniejszych jej sukcesów był słynny model atomu Bohra, który wyjaśniał linie widmowe atomu wodoru. Absorpcja i emisja fotonów powiązana została z przeskokami elektronu pomiędzy poszczególnymi dopuszczalnymi kwantowo orbitami w powłoce atomu. O ile przynajmniej na płaszczyźnie fenomenologicznej model się sprawdził, kwestia fizyczności nieciągłych zmian stanu elektronu pozostała sporna [SW97]. Do zaciekłych krytyków przeskoków kwantowych należał Schrödinger, który w ich miejsce proponował opis za pomocą rezonansu między elektronem a polem elektromagnetycznym [Sch52b; Sch52a]. Ponad 70 lat po pionierskiej pracy Bohra [Boh13], Cook i Kimble na podstawie pomysłu Dehmelta [Deh75] zaproponowali obserwację przeskoków kwantowych w pojedynczym jonie [CK85]. Pomysł polegał na wykorzystaniu układu trójpoziomowego. Oscylacja między stanami 1 a 2 byłaby wymuszona przez silny laser, co powodowałoby intensywną fluorescencję. Jednocześnie stan 2 jest słabo sprzężony z metastabilnym stanem 3 ("shelving state"). Przejście do stanu 3 jest widoczne poprzez zanik fluorescencji. Tak więc przeskoki kwantowe między oscylacją 1-2 a stanem 3 powodują skokowe zmiany w sygnale fluorescyjnym. Krótko po przedstawieniu pomysłu efekt został zaobserwowany doświadczalnie [NSD86; Sau+86; Ber+86]. Jak zauważył Javanainen [Jav86], istnieje też alternatywna interpretacja tego rodzaju wyników: zamiast przeskoków elektronowych, można rozważyć statystykę zliczeń fotonów. Przejście od fizyki "kwantowej" do "klasycznej" może nastąpić na różnych poziomach. Niezależnie od tego,

przeskoki kwantowe wymykają się z konwencjonalnego opisu w ramach teorii kwantowej. Prawdopodobieństwo znalezienia atomu w stanie 3 jest ciągłą funkcją czasu. Zamiast uśrednienia po zespole statystycznym, konieczne stało się sformułowanie opisu pojedynczej realizacji.

Eksperymenty grup Dehmelta, Toschka i Winelanda otworzyły również perspektywę na zagadnienie ciągłej obserwacji układu kwantowego. Praprzodkiem w tej dziedzinie może zostać uznana praca Motta z 1929, w której podejmuje on problem cząstki α emitowanej w wyniku rozpadu jądra atomu [Mot29]. Rozważa on w jaki sposób można pogodzić przewidzianą przez mechanikę kwantową falę sferyczną opisującą cząstkę z obserwowanymi doświadczalnie w komorze Wilsona konkretnymi trajektoriami. Zaproponowane przez Motta rozwiązanie polega na uwzględnieniu oprócz samej cząstki obecnych w komorze atomów gazu. Zaobserwował on, że łączone prawdopodobieństwo ich jonizacji jest znaczące tylko wtedy, jeśli znajdują się one na prostej linii przebiegającej przez promieniotwórczą próbkę. Współcześnie możemy dodać, że rozwiązanie to pomija sprzężenie zwrotne atomów gazu z cząstką α. Jest to uzasadnione, ponieważ cząstka ma bardzo duży pęd. W pewnym sensie jest to więc problem efektywnie klasyczny. Rozwinięcie wyżej wspomnianego formalizmu uogólnionych pomiarów pozwoliło podjąć problem ciągłego monitorowania układu prawdziwie kwantowego. Do najwcześniejszych publikacji w tej dziedzinie należą prace Mensky'ego [Men79] i Srinivasy i Daviesa [SD81].

Teoria układów otwartych Zagadnienie przeskoków kwantowych (lub ogólniej: kwantowych procesów stochastycznych) jest blisko spokrewnione z teorią układów otwartych. Tę nieoczywistą relację również odkrywano stopniowo, a obie dziedziny z początku rozwijały się równolegle. Układ otwarty w mechanice kwantowej standardowo jest opisany przez macierz gęstości, której dynamika zadana jest przez tzw. równanie master. Formalizm ten ma długą historię: już w 1927 Landau badał w ten sposób problem oscylatora tłumionego [Lan27]. Wśród późniejszych przykładów można wymienić równanie z "potencjałem optycznym" w fizyce jądrowej [Fer54; FPW54], równanie Lamba optyki kwantowej [Lam64] oraz teorię relaksacji Redfielda [Red65], która miała zastosowanie w badaniach różnych układów. Jednak dopiero w latach 70. zainteresowanie badaczy skupiło się wokół pytania, jak w ogólności można scharakteryzować ewolucję otwartego układu kwantowego. Przełomowe prace w tej kwestii zostały opublikowane niemal równocześnie przez Lindblada [Lin76] oraz Goriniego, Kossakowskiego i Sudarshana [VS76]. Wyprowadzane przez nich równanie opisuje dynamikę układu dysypatywnego za pomocą operatorów przeskoku.

Schematy numeryczne Równanie Goriniego-Kossakowskiego-Lindblada-Sudarshana (GKLS) jest równaniem różniczkowym, które w deterministyczny sposób opisuje ewolucję macierzy gęstości. Jest to więc statystyczny opis dynamiki. Natomiast "przeskoki" następują jedynie w konkretnej realizacji doświadczalnej i mają charakter ściśle niedeterministyczny. Do ich opisu konieczne jest zatem równanie stochastyczne, nazywane stochastycznym równaniem Schrödinger. Jest ono wyrażone w formalizmie stochastycznych równań różniczkowych, znanym w matematyce od kilku dekad [Arn74]. Prowadzi to do nowych metod numerycznych dla symulacji układów otwartych. Zostało to zauważone niezależnie przez szereg badaczy na początku lat 90. [DCM92; GPZ92; DZR92] (metoda ta wykorzystywana jest obszernie w tej pracy i została bardziej szczegółowo przedstawiona w rozdziale 2.3.1). Pokrewny formalizm został zaproponowany w tym samym czasie przez Carmichaela. Skupia się on na analizie pól uczestniczących w procesie detekcji, uwzględniając m.in. ważny przypadek detekcji heterodynowej [Car93]. To Carmichael ukuł określenie "kwantowej trajektorii" opisującej stochastyczną ewolucję stanu kwantowego.

Modele stochastyczne Niezależnie od tych badań, dążących raczej do uzyskania praktycznych narzędzi w ramach optyki kwantowej, stochastyczne równanie Schrödingera badane było już wcześniej w ramach prac dotyczących podstaw mechaniki kwantowej. Jednym z przykładów jest praca Gisina z 1984, w której wyprowadził on ze stochastycznego modelu postulat rzutowy Lüdersa [Gis84]. Zaliczają się do tego także wymienione wcześniej, rozwinięte w tym czasie modele obiektywnego kolapsu [Dió89; GPR90]. Jak wspomniano, część z nich zakładała – w przeciwieństwie do kwantowych przeskoków – ciągłą stochastyczną ewolucję. Modele takie są równoważne w tym sensie, że mogą prowadzić do tego samego równania master. Ich porównania dokonali Percival i Gisin w [GP92]. Jak wskazują, modele ciągłe stochastyczne są w stanie odtworzyć "przeskoki" jako gwałtowne zmiany funkcji falowej. Jest to zgodne z teorią kwantowych trajektorii Carmichaela i zostało ostatnio zademonstrowane doświadczalnie [Min+19].

Równolegle procesy ciągłego monitorowania układów kwantowych badane były od lat 80. w ramach matematyki fizycznej. Bielawkin rozwinął kwantowy stochastyczny rachunek różniczkowy opierając się na wynikach z klasycznej teorii sterowania [Bel87; Bel92; BS92]. Prace te dotyczyły tzw. filtracji, czyli problemu ciągłej aktualizacji rozkładu prawdopodobieństwa warunkowanego pomiarem z szumem. Podobny pomysł, w prostszy sposób, zaproponowali także Wiseman i Milburn [WM93]. W ten sposób powstała "kwantowa teoria filtracji", pozwalająca na doświadczalne sterowanie układami kwantowymi [Arm+02; Smi+02]. Fundamentalny wkład w tę

dziedzinę miał także Barchielli, który uogólnił teorię z uwzględnieniem przeskoków kwantowych [Bar90; Bar93].

1.3 Ciągły pomiar położenia i pedu

Przedmiotem badań niniejszej pracy jest wielokrotny pomiar położenia i pędu cząstki kwantowej. Jednoczesny pomiar tych dwóch zmiennych jest możliwy w mechanice kwantowej, przy czym jego dokładność oczywiście jest ograniczona przez zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Problem ten w ramach pojedynczego pomiaru był dyskutowany przez Arthursa i Kelly'ego [AK65]. Od czasu opracowania ogólnej teorii pomiaru ukazało się wiele prac dotyczących ciągłego pomiaru obserwabli o ciągłym widmie. Wykorzystane zostały różne formalizmy, takie jak metoda całek po trajektoriach [BLP82], charakterystycznych funkcjonałów [Bar83] czy też wyżej wspomnianych kwantowych stochastycznych równań różniczkowych [BL85; Bar86; Dió88]. Praca Cavesa i Milburna [CM87] przedstawia model ciągłego pomiaru położenia, rozumianego jako granica nieskończenie częstych i słabych pomiarów, rozważonego w różnych formalizmach.

Problem ciągłego pomiaru układów kwantowych pozostaje czynną dziedziną badań. W ostatnich latach uwagę przyciągnęło pytanie, na ile stałe monitorowanie układu prowadzi do zachowań klasycznych. Wczesnym wkładem jest tutaj praca Joosa i Zeha [JZ85]. Wśród późniejszych prac można wymienić [Bru+97; BHJ03; Oli14]. W [FL92] zbadany został wpływ wielokrotnego pomiaru położenia na czas tunelowania cząstki w potencjale dwujamowym. Wykluczone zostało przy tym zamrożenie dynamiki cząstki, znane jako efekt Zenona. W odpowiedzi na to autorzy [GWM93] zaproponowali intuicyjny fizycznie stochastyczny model pomiaru, wykazujący efekt Zenona. [AFU16] wskazuje na osobną krytyczną fazę w ultrazimnym gazie atomowym, wynikającą z ciągłej obserwacji. [AU17; AU18] badają możliwość ciągłej obserwacji kwantowego układu wielocząstkowego. Wielokrotny pomiar powiązany został także ze zjawiskami chaotycznymi [DG90; BHJ00].

Rozdział 2

Teoria ciągłego pomiaru układów kwantowych

Wstęp

Typowe teksty wprowadzające do mechaniki kwantowej przedstawiają teorię opartą o pojęcie *funkcji falowej*, nazywanej także stanem układu i będącej elementem przestrzeni Hilberta. Drugim kluczowym pojęciem są *operatory*, czyli odwzorowania liniowe działające na stan. Przykładem może być unitarny operator $U(t)$ zadający dynamikę układu. Równie istotną klasę stanowią *obserwable*, które zgodnie z postulatami odpowiadają wielkościom fizycznym przypisywanym układowi. Możliwe wyniki pomiaru takiej wielkości zadane są przez wartości własne obserwabli – ponieważ mają to być liczby rzeczywiste, obserwabla musi być operatorem hermitowskim. Po wykonanym pomiarze układ znajduje się w stanie własnym obserwabli odpowiadającym uzyskanemu wynikowi (lub jest elementem podprzestrzeni własnej w przypadku degeneracji). Pomiar z zasady jest zdarzeniem losowym – prawdopodobieństwo uzyskania wyniku zadane jest przez moduł kwadratu iloczynu skalarnego odpowiedniego stanu własnego i funkcji falowej przed pomiarem.

Tak ujęta teoria pomiaru może nastręczyć jej adeptowi wiele pytań. Po pierwsze wydaje się, że nie wszystko, co potocznie nazwalibyśmy "wynikiem" doświadczenia, musi być liczbą – mogą to być także zdarzenia typu "dioda świeci się/nie świeci", "kot żyje/nie żyje" itd. Można również zauważyć, że tak naprawdę nigdy (a z pewnością w fizyce kwantowej) nie mierzymy *bezpośrednio* jakiejś wielkości układu fizycznego, ale dzieje się to za pośrednictwem jednego lub wielu instrumentów pomiarowych – jak ostatecznie otrzymana liczba (np. napięcie na woltomierzu) ma się

do teoretycznie postulowanego "wyniku" pomiaru kwantowego oraz zmiany jego stanu? Jeszcze bardziej problematyczne wydają się tzw. pomiary niszczące, w wyniku których układ przestaje istnieć (dość powszechnie spotykane w optyce kwantowej). Mówienie w takim przypadku o stanie własnym nieistniejącego już układu wydaje się bezsensowne, a co za tym idzie, również cały opisany powyżej formalizm. Ponadto "doświadczalnik" wtrąciłby, że każdy wynik pomiaru obarczony jest jakimś błędem – co jeśli obejmuje on wiele różnych wartości własnych mierzonej obserwabli?

Te trudności powodują, że wiele zaawansowanych podręczników starających się o aksjomatyczne sformułowanie teorii odbiega od naiwnego schematu przedstawionego w pierwszym akapicie, wprowadzając bardziej abstrakcyjne pojęcia. Poszukując możliwie najogólniejszej charakteryzacji, część autorów [BB75; Kra83] sprowadza dowolny pomiar do "pytań elementarnych", czyli takich na które odpowiedź może brzmieć jedynie tak lub nie. Bardziej skomplikowane pomiary zawsze dają się przedstawić jako kombinacje pytań elementarnych.

Jednak najpoważniejszą trudnością związaną z kwestią pomiaru w mechanice kwantowej pozostaje pytanie, dlaczego właściwie definiujemy odrębny zestaw zasad dla "ewolucji zwyczajnej" oraz zmian zachodzących w wyniku pomiaru. Jako pierwszy sprzeczność tę wyodrębnił von Neumann, nazywając te zasady odpowiednio procesem II. i I. [Neu32, s. 186]. Wydaje się, że pomiar nie powinien zasadniczo różnić się od pozostałych zjawisk w fizyce, i że powinniśmy być w stanie sprowadzić go do tego samego rodzaju fundamentalnych oddziaływań przyrody. To z kolei oznaczałoby, że zarówno układ, instrument pomiarowy jak i obserwator ostatecznie opisane są jednym równaniem Schrödingera (proces II.), a proces I. ma charakter zasady fenomenologicznej, dającej wyjaśnić się w obrębie procesu I. Zadanie to nazywane jest problemem pomiaru, a jego analiza doprowadziła m.in. do powstania różnych interpretacji mechaniki kwantowej, które zostały przedstawione skrótowo rozdziale 1. Niezależnie od tej kontrowersji, możliwość (choćby teoretyczna) sprowadzenia każdego pomiaru do "zwyczajnych" oddziaływań wskazuje na to, że pełen opis musi nastąpić w ramach ogólnego formalizmu, który zasadniczo nie wyróżnia działalności tak czy inaczej rozumianego obserwatora.

Podział tego rozdziału jest następujący. Część 2.1 opisuje rzutową teorię pomiaru, którą można zrozumieć jako sformalizowanie i uściślenie schematu przedstawionego u początku tego wstępu. Pozwoli to wyprowadzić wzory w postaci analogicznej do tych z opisanej później, ogólniejszej teorii. Rzutowa teoria pomiaru jest również istotna, ponieważ – jak wyjaśnimy później – każdy ogólny pomiar da się przedstawić matematycznie jako rezultat pomiaru rzutowego na innym układzie. Część 2.2 przedstawia powszechnie przyjęty współcześnie formalizm, w ramach którego da

się opisać dowolny pomiar kwantowy. Stanowi to podstawę do części 2.3, w której przedstawimy ogólną teorię wielokrotnego (lub w granicy – ciągłego) pomiaru układu kwantowego. Część notacji oraz wyprowadzeń zaczerpnięta jest z podręcznika [WM09].

2.1 Pomiar rzutowy

Dla zachowania pełnej ogólności przyjmiemy obecnie, że układ podlegający pomiarowi opisany jest macierzą gęstości ρ. Będziemy przedstawiali jednak też wzory dla prostszego przypadku stanu czystego $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Zainteresowani jesteśmy pomiarem obserwabli Λ. Ponieważ Λ jest hermitowska, możemy zapisać ją w postaci diagonalnej

$$\Lambda = \sum_j \lambda_j \Pi_j \tag{2.1}$$

gdzie λ_j są wartościami własnymi a Π_j operatorami rzutowymi na podprzestrzeń własną. W przypadku nie-zdegenerowanego λ_j możemy zapisać $\Pi_j = |j\rangle\langle j|$ gdzie $|j\rangle$ to stan własny. Z hermitowskości Λ wynika (twierdzenie spektralne) że λ_j są rzeczywiste a Π_j ortonormalne: $\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j$. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku λ_j jest zadane przez

$$p_j = \mathrm{Tr}\,[\Pi_j \rho], \tag{2.2}$$

Jeżeli przeprowadzimy pomiar bezwarunkowy, tzn. taki po którym nie odczytujemy wyniku, stan po pomiarze będzie zadany przez

$$\rho' = \sum_j \Pi_j \rho \Pi_j. \tag{2.3}$$

Widzimy, że poszczególne człony tej sumy odpowiadają różnym możliwym stanom a posteriori. Jeżeli więc przeprowadzimy pomiar z odczytaniem wyniku (warunkowy), stan po pomiarze będzie jednym z członów, z odpowiednią normalizacją:

$$\rho' = \frac{1}{p_j} \Pi_j \rho \Pi_j \tag{2.4}$$

Stan po pomiarze zależy od tego czy odczytaliśmy wynik, ponieważ macierz gęstości reprezentuje naszą *wiedzę* o układzie, tzn. prawdopodobieństwa jakie przypisujemy poszczególnym fizycznym realizacjom. W szczególności z (2.3) wynika, że pomiary mogą zamienić stan czysty w mieszany.

Równania (2.2) i (2.4) często przedstawiane są jako *postulaty* mechaniki kwantowej. Zapisane dla stanu czystego (oraz obserwabli o niezdegenerowanym widmie, po

drugim znaku równości)

$$p_j = \langle\psi|\Pi_j|\psi\rangle = |\langle\psi|j\rangle|^2 \tag{2.5}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}}\Pi_j|\psi\rangle = |j\rangle, \tag{2.6}$$

oddają zależności znane z wprowadzeń do mechaniki kwantowej. Równania (2.2) i (2.5) określa się mianem reguły Borna, natomiast (2.4) i (2.6) to tzw. postulat kolapsu lub redukcji funkcji falowej.

Z powyższych równań łatwo jest wyprowadzić wzór na wartość oczekiwaną:

$$\langle\Lambda\rangle = \sum_j p_j\lambda_j \tag{2.7}$$

$$= \mathrm{Tr}[\Lambda\rho] \tag{2.8}$$

i wariancję:

$$\langle\Lambda^2\rangle = \sum_j p_j^2\lambda_j \tag{2.9}$$

$$= \mathrm{Tr}[\Lambda^2\rho] \tag{2.10}$$

Obserwable o ciągłym widmie

W tej rozprawie szczególną uwagę poświęcamy pomiarowi położenia i pędu, reprezentowanym przez operatory X i P. Analogicznie do równania (2.1) można przedstawić je w postaci diagonalnej:

$$X = \int dx\, x|x\rangle\langle x| \tag{2.11}$$

$$P = \int dp\, p|p\rangle\langle p| \tag{2.12}$$

Przedyskutujemy teraz przypadek położenia – równania dla pomiaru pędu są zupełnie analogiczne. Ponieważ mamy do czynienia z ciągłymi zmiennymi, sumy zastąpiliśmy całkami. Dlatego $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$, zdefiniowane w analogii do powyższych równań, ściśle mówiąc nie jest operatorem rzutowym, ale gęstością operatora rzutowego: w analogii do (2.5), możemy zapisać $p_x dx = \langle\psi|\Pi_x|\psi\rangle dx \equiv |\psi(x)|^2 dx$, gdzie zgodnie z konwencją $\psi(x)$ oznacza funkcję falową w przestrzeni położeń, a $p_x dx$ jest prawdopodobieństwem znalezienia cząstki w infinitezymalnym interwale dx. Z tego samego powodu Π_x rzutuje na niefizyczny (nie dający się unormować) stan $|x\rangle$. Istnieje możliwość zdefiniowania nieco bardziej realistycznego rzutowego pomiaru

położenia. Operatory

$$\Pi_j = \int f_j(x)\Pi_x \, dx \tag{2.13}$$

są ortonormalne jeśli spełniony jest warunek, że $f_j(x)$ są funkcjami prostokątnymi (tzn równe 1 na interwale I_j i 0 poza tym), przy czym $I_j \cap I_k = \emptyset$ dla $j \neq k$. Jednak łatwo się przekonać, że w rezultacie takiego pomiaru otrzymujemy funkcję falową, która jest nieciągła na brzegach interwału I_j. Widać, że modelowanie realnego pomiaru położenia wymaga wyjścia poza teorię rzutową.

2.2 Pomiar uogólniony – miara dodatnio określonych operatorów

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy rzutowe operatory pomiaru Π_j, których kluczową cechą była ortogonalność. Ponadto, ponieważ wyprowadziliśmy je z rozkładu spektralnego obserwabli, sumują się one do jedynki. Wyrażone w równaniach, te dwie cechy brzmią następująco:

$$\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j \tag{2.14}$$

$$\sum_j \Pi_j = 1 \tag{2.15}$$

Łatwo przekonać się, że (2.15) jest warunkiem koniecznym dla *każdego* modelu pomiaru: Tylko wtedy wielkości p_j z (2.2) dają interpretować się jako *prawdopodobieństwa* wyników pomiaru. Z tego samego powodu konieczne jest, aby były one dodatnio określone. Stąd widać, że sensowne uogólnienie możliwe jest jedynie przez porzucenie warunku (2.14). Dlatego ten ogólny rodzaj pomiarów nazywany jest w literaturze także pomiarem nieortogonalnym [BKT92].

Mamy zatem nowy rodzaj operatorów, który oznaczamy przez symbol E_j. Spełniają one słabszy warunek

$$\sum_j E_j = 1 \tag{2.16}$$

oraz są dodatnie. W literaturze nazywane są one *efektami* (ang. effects). Ponieważ nie muszą być ortogonalne, ich liczba może być większa od wymiaru przestrzeni Hilberta. Każde E_j powiązane jest z jednym wynikiem pomiaru j, który uzyskujemy (por. (2.2)) z prawdopodobieństwem

$$p_j = \mathrm{Tr}\, E_j \rho \tag{2.17}$$

Równania (2.16) i (2.17) mogą być uogólnione dla przestrzeni Hilberta o nieskończonym wymiarze oraz (nieprzeliczalnie) nieskończonego zbioru efektów $\{E_j\}$. Uzasadnia to technicznie brzmiącą, jednak powszechnie spotykaną w literaturze nazwę *miary dodatnio określonych operatorów* (ang. positive operator-valued measure, POVM). Warto zauważyć, że j w tym kontekście nie musi być wartością własną jakiejś obserwabli. Jest to po prostu liczba lub dowolny inny symbol wyrażający "wynik" pomiaru. Ponieważ E_j są dodatnio określone, można przedstawić je w postaci

$$E_j = M_j^\dagger M_j. \tag{2.18}$$

M_j nazywane będą tutaj *operatorami pomiaru*. Opisują one odwzorowanie stanu kwantowego w ramach pomiaru (por. (2.4))

$$\rho \to \frac{1}{p_j} M_j \rho M_j^\dagger, \tag{2.19}$$

lub w języku funkcji falowych

$$|\psi\rangle \to \frac{1}{\sqrt{p_j}} M_j |\psi\rangle. \tag{2.20}$$

Dla zilustrowania tego formalizmu przedstawimy teraz historycznie istotny model pomiaru von Neumann'a [Neu32, s. 236]. Zakłada on podział na układ podlegający obserwacji $\mathcal{S}$ oraz miernik, czyli pośredniczący w pomiarze układ pomocniczy $\mathcal{A}$ (w literaturze anglojęzycznej nazywany *meter*, *apparatus* lub *ancilla*). Hamiltonian całkowitego układu to

$$H = H_S + H_A + V_{SA}, \tag{2.21}$$

gdzie H_S i H_A to Hamiltoniany podukładów a V_{SA} jest ich oddziaływaniem. Przyjmujemy, że H_S ma dyskretne widmo, natomiast $H_A = P^2/2m$ opisuje "wskazówkę miernika". Pracujemy w przybliżeniu, w którym niepomijalny jest jedynie ostatni człon w (2.21) dla którego zakładamy postać iloczynową. Uwzględniając te założenia

$$H = \lambda Q P, \tag{2.22}$$

gdzie Q to interesująca nas obserwabla z $\mathcal{S}$ a P jest pędem wskaźnika. Parametr λ modeluje siłę oddziaływania. Układ $\mathcal{S}$ w chwili początkowej znajduje się w stanie $|\phi_0\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\alpha\rangle$, gdzie $|\alpha\rangle$ oznaczają stany własne Q, a wskaźnik w $|\theta(x_0)\rangle$, co ma oznaczać funkcję zlokalizowaną wokół położenia x_0. Dla stanu układu złożonego możemy więc zapisać $|\Psi_0\rangle = |\phi_0\rangle \otimes |\theta(x_0)\rangle$. Następnie pozwalamy obu układom oddziaływać ze sobą przez czas t zgodnie z (2.22). Wykorzystując postać diagonalną

$Q = \sum_\alpha q_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ dla operatora ewolucji możemy zapisać:

$$U(t) = \exp(-i\lambda QPt) \tag{2.23}$$
$$= \sum_\alpha |\alpha\rangle \exp(-i\lambda q_\alpha Pt)\langle\alpha|. \tag{2.24}$$

Tak więc po czasie t całkowity stan układu to

$$U(t)|\Psi_0\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\alpha\rangle \otimes |\theta(x_0 - \lambda q_\alpha t)\rangle, \tag{2.25}$$

gdzie wykorzystaliśmy, że P jest generatorem translacji położenia x wskaźnika. Zauważmy, że powyższe równanie opisuje stan splątany, tzn. nie daje się przedstawić jako iloczyn wektorów z przestrzeni Hilberta $\mathcal{S}$ i $\mathcal{A}$. Jest to ogólna właściwość realistycznego fizycznie procesu pomiaru. Proces pomiaru kończy się odczytem wyniku z miernika $\mathcal{A}$. Zgodnie z aksjomatami teorii kwantowej odpowiada to operacji rzutowej w przestrzeni miernika, przy czym zakładamy, że nie zaburza to już układu $\mathcal{S}$. Tak więc działamy operatorem $1 \otimes \Pi_j$, gdzie w analogii do (2.13) przyjmiemy że

$$\Pi_j = \int_{x_j-\delta/2}^{x_j+\delta/2} dx |x\rangle\langle x|. \tag{2.26}$$

Aby rozróżnić stany własne Q, optymalna rozdzielczość δ tego pomiaru to $\lambda\Delta q_\alpha t$. Odczyt pozycji $x_j = x_0 - \lambda q_\alpha t$ może być wtedy jednoznacznie powiązany ze stanem $|\alpha\rangle$ układu mierzonego. Co więcej, następuje to z prawdopodobieństwem $|c_\alpha|^2$, zgodnie z regułą Borna.

Model von Neumann'a jest prostym przykładem pokazującym, jak w ramach mechaniki kwantowej można opisać powstanie korelacji między układem i urządzeniem pomiarowym. Nie rozwiązuje natomiast wspomnianego wyżej *problemu pomiaru* – cały czas łączy się on z rzutowaniem (tyle że "na wyższym poziomie"), co znów prowadzi do tajemniczego kolapsu funkcji falowej. Możemy jednak na jego przykładzie zobrazować pewien ogólny schemat. Polega on na rozróżnieniu co najmniej dwu układów – instrumentu pomiarowego oraz "właściwego" podukładu $\mathcal{S}$. W większości przypadków interesuje nas jedynie dynamika tego drugiego. Wyjaśnia to dlaczego teoria pomiaru jest tak ściśle związana z dziedziną otwartych układów kwantowych. Uzasadnia to także wprowadzenie operatora M_j opisującego odwzorowanie stanu $|\phi_0\rangle$ należącego do $\mathcal{S}$ w inny stan z $\mathcal{S}$ (por (2.20)).

Przedstawiony tutaj model pomiaru da się uzasadnić również bardziej formalnie. Rozważmy ogólne odwzorowanie stanu kwantowego $\rho \to \rho' = \Phi_j[\rho]$ powiązane z dokonaniem pomiaru j (odwzorowanie takie nazywane jest *superoperatorem*). Powinno ono spełniać następujące warunki:

1. Ponieważ zamierzamy interpretować $\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho]$ jako prawdopodobieństwo, postulujemy:
$$0 \leqslant \operatorname{Tr}\Phi_j[\rho] \leqslant 1. \tag{2.27}$$

2. Φ_m jest odwzorowaniem liniowo wypukłym, tzn. dla macierzy gęstości ρ_i i nieujemnych liczb p_i spełniających $\sum_i p_i = 1$:
$$\Phi_j\left[\sum_i p_i\rho_i\right] = \sum_i p_i\Phi_j[\rho_i]. \tag{2.28}$$
Warunek ten można uzasadnić w następujący sposób. Niech ρ oznacza zespół stanów kwantowych o wagach p_i: $\rho = \sum_i p_i\rho_i$. Mówiąc inaczej, p_i oznacza prawdopodobieństwo, że układ został przygotowany w stanie ρ_i. Wykonujemy pomiar Φ_j na stanie ρ. Stan po pomiarze $\Phi_j[\rho]/\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho]$ (por. (2.4)) można zapisać jako sumę po elementach zespołu:
$$\frac{\Phi_j[\rho]}{\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho]} = \sum_i p(i|j)\frac{\Phi_j[\rho_i]}{\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho_i]} \tag{2.29}$$
$\Phi_j[\rho_i]/\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho_i]$ to stan układu ρ_i po wykonaniu pomiaru j, natomiast $p(i|j)$ to prawdopodobieństwo, że układ został przygotowany w stanie ρ_i pod warunkiem, że uzyskaliśmy wynik j. Wykorzystując regułę Bayes'a możemy zapisać:
$$p(i|j) = \operatorname{Tr}\Phi_j[\rho_i]\frac{p_i}{\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho]} \tag{2.30}$$
Gdzie wykorzystaliśmy, że $\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho_i]$ to nic innego jak prawdopodobieństwo wyniku j pod warunkiem, że układ znajduje się w ρ_i, a $\operatorname{Tr}\Phi_j[\rho]$ to całkowite prawdopodobieństwo uzyskania j. Podstawiając (2.30) do (2.29) uzyskujemy (2.28).

3. Φ_m jest *całkowicie dodatnie*: Oznacza to, że nie tylko Φ_m, ale także $\Phi_m \otimes 1$ jest odwzorowaniem dodatnim, gdzie 1 jest operatorem jednostkowym na dowolnej innej przestrzeni Hilberta. Warunek ten zazwyczaj uzasadnia się w następujący sposób: Załóżmy, że układ $\mathcal{S}$ na którym wykonywany jest pomiar jest splątany z jakimś innym układem $\mathcal{S}'$. Wtedy żądamy, aby dokonanie pomiaru na podukładzie $\mathcal{S}$ bez zaburzania $\mathcal{S}'$, tzn. zadziałanie $\Phi_m \otimes 1$, prowadziło do stanu fizycznego, tj. dodatniego.

Tak zdefiniowane odwzorowania nazywane są *operacjami*. Kraus [Kra83] udowodnił, że każda operacja posiada reprezentację

$$\Phi_j[\rho] = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \tag{2.31}$$

gdzie K_i nazywane są operatorami Kraussa i spełniają nierówność $1 - \sum K_i^\dagger K_i \geqslant 0$. Łatwo udowodnić, że reprezentacja Kraussa nie jest jednoznaczna, tzn. ściśle mówiąc, operacji Φ_j odpowiada rodzina zbiorów operatorów $\{K_i\}$.

Kolejna cecha uzasadniająca fizyczną istotność POVM wynika z twierdzenia Neumarka [Per93, s. 285]. Zgodnie z nim, *każda* operacja na układzie $\mathcal{S}$ może być przedstawiona jako odwzorowanie unitarne U_{SA} związane z oddziaływaniem między $\mathcal{S}$ i jakimś miernikiem $\mathcal{A}$, oraz następujący po niej pomiar rzutowy Π_A na $\mathcal{A}$. Jeżeli przez Φ oznaczymy operację powiązaną z naszym uogólnionym pomiarem, przez ρ_S macierz gęstości układu $\mathcal{S}$ przed pomiarem, a przez $|\theta_A\rangle$ początkowy stan miernika, można to zapisać w postaci równania:

$$\Phi[\rho_S] = \mathrm{Tr}_A[(1 \otimes \Pi_A) U_{SA}(\rho_S) \otimes |\theta_A\rangle\langle\theta_A| U_{SA}^\dagger] \tag{2.32}$$

Jest to więc odwrócenie konstrukcji przeprowadzonej wcześniej w tym rozdziale, kiedy w ramach modelu von Neumanna zapostulowaliśmy konkretne oddziaływanie między układem a miernikiem oraz pomiar rzutowy na mierniku w celu uzasadnienia wprowadzenia operatora opisującego wynikającą z tego pomiaru zmianę stanu układu mierzonego. Jak widać, teoria pomiaru oparta o POVM nie zmienia fundamentalnych zasad mechaniki kwantowej, a każdy uogólniony pomiar ostatecznie sprowadza do pomiaru rzutowego wykonanego na układzie pomocniczym.

2.3 Pomiar ciągły

Będziemy rozważać teraz dynamikę układu mierzonego. Jak wspomniano, pomiar z zasady jest oddziaływaniem z "czymś będącym na zewnątrz", tzn. że rozważamy fizykę *układu otwartego*. Wiadomo, że ewolucja zamkniętego układu kwantowego zadana jest przez operator unitarny $U(t, t')$, tak że

$$\rho(t') = U(t, t')\rho(t)U^\dagger(t, t'). \tag{2.33}$$

Ewolucja ta jest lokalna w czasie, tzn. stan układu w chwili $t + dt$ zależy wyłącznie od stanu w chwili t – mówiąc jeszcze inaczej, da się zapisać równanie różniczkowe

opisujące ewolucję. Jest to równanie von Neumanna

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho]. \tag{2.34}$$

Jak wygląda uogólnienie tych równań dla układu otwartego? W poprzednim rozdziale argumentowaliśmy, że każde fizyczne odwzorowanie kwantowe powinno być opisane przez superoperator działający na stan, $\rho \to \Phi[\rho]$. W szczególności musi to więc dotyczyć odwzorowania $\rho \to \mathcal{N}_t[\rho]$ ewoluującego układ o t do przodu w czasie (podkreślamy, że interesuje nas jedynie przypadek $t \geqslant 0$, ponieważ interesujące nas procesy w ogólności są nieodwracalne). Dodatkowo, oprócz warunków stawianych superoperatorom przedstawionym w rozdziale 2.2, żądamy aby:

1. $\mathcal{N}_t\mathcal{N}_s = \mathcal{N}_{t+s}$. Ten warunek powoduje, że $\{\mathcal{N}_t\}$ nazywane jest *kwantową półgrupą dynamiczną.*

2. $\mathrm{Tr}\,(\mathcal{N}_t[\rho]A)$ było ciągłe w t dla każdego stanu kwantowego ρ i operatora hermitowskiego A. Przypomnijmy, że jeśli A jest obserwablą, oznacza to, że jej wartość oczekiwana nie zmienia się w sposób skokowy.

Warunki te są równoznaczne z "markowowskością", tzn. opisaną wyżej cechą układu, którego ewolucja jest lokalna w czasie. Lindblad oraz Gorini, Kossakowski i Sudarshan [Lin76; VS76] udowodnili, że dynamika takich układów jest zadana przez równanie różniczkowe o postaci

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \left[C_i\rho C_i^\dagger - \frac{1}{2}\left(C_i^\dagger C_i\rho + \rho C_i^\dagger C_i\right)\right] \tag{2.35}$$

Jest to słynne równanie Goriniego-Kossakowskiego-Sudarshana-Lindblada (w skrócie równanie GKSL lub Lindbladian), uogólniające (2.34). Operatory C_i nazywane są operatorami przeskoku (terminologia ta stanie się jasna w dalszej części rozdziału). Wyznaczają one nieodwracalne "kanały" kwantowe, jednak ich wybór nie jest jednoznaczny i konkretny proces fizyczny może być opisany przy pomocy różnych zbiorów $\{C_i\}$.

Warto zauważyć, że markowowskość, czyli "brak pamięci" nie jest cechą każdego układu otwartego. Może zdarzyć się na przykład, że jakaś informacja o układzie zostanie przekazana otoczeniu, a ono zwróci ją układowi z opóźnieniem. Dlatego często precyzowane są fizyczne warunki oddziaływania układu z otoczeniem, a następnie wyprowadzane jest z nich równanie (2.35). Znane są również w literaturze równania master nie posiadające postaci Lindblada. Jednak równania te, ze względu na złamanie warunku dodatniości, zawsze będą prowadziły dla niektórych stanów po-

czątkowych ρ_0 do niedodatniej macierzy gęstości (czyli stanu niefizycznego). Dlatego muszą one zawsze być jakimś przybliżeniem. Stąd nie wynika oczywiście, że każde równanie GKSL gwarantuje rozwiązanie ścisłe. Ostatecznie więc dobór odpowiedniego równania master zależeć musi od szczegółowych cech badanego układu. Nierzadko wybór opisu markowowskiego podyktowany jest względami pragmatycznymi – jego analiza jest łatwiejsza i znane są liczne schematy rozwiązań numerycznych. Poniżej przedstawiamy jeden szczególnie prosty i popularny algorytm.

2.3.1 Ewolucja funkcji falowej metodą Monte Carlo

Formalizm ten został zaproponowany przez Molmera, Castina i Dalibarda [DCM92]. Celem jest rozwiązanie (2.35). Algorytm generuje stochastycznie zbiór trajektorii funkcji falowych $|\psi_i(t)\rangle$. Mogą być one rozumiane jako możliwe pojedyncze realizacje dynamiki w eksperymencie. Uśrednienie po wielu trajektoriach $\overline{|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|}$, jak udowodniają autorzy, w granicy daje rozwiązanie $\rho(t)$ równania GKSL.

Przyjmujemy, że w chwili początkowej mamy do czynienia ze stanem czystym $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Jeśli jest to stan mieszany $\sum p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, początkowe funkcje falowe muszą zostać dobrane z częstościami odpowiednimi do wag p_i. Symulowany interwał czasowy podzielony jest na kroki czasowe δt. Wprowadzamy niehermitowski Hamiltonian

$$H = H_S - \frac{i\hbar}{2}\sum_i C_i^\dagger C_i, \tag{2.36}$$

gdzie H_S oznacza hermitowski Hamiltonian układu zamkniętego. W każdym kroku czasowym najpierw ewoluujemy funkcję falową zgodnie z H:

$$|\widetilde{\psi}(t+\delta t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H\delta t}|\psi(t)\rangle \approx (1 - \frac{i}{\hbar}H\delta t)|\psi(t)\rangle. \tag{2.37}$$

Ponieważ H nie jest hermitowskie, norma funkcji falowej nie jest zachowana, i mamy $\langle\widetilde{\psi}(t+\delta t)|\widetilde{\psi}(t+\delta t)\rangle = 1 - \sum_i \delta p_i$. Interesują nas wartości p_i, które zadane są przez wzór

$$\delta p_i = \delta t\langle\psi(t)|C_i^\dagger C_i|\psi(t)\rangle. \tag{2.38}$$

Kluczowy zabieg polega na interpretacji tych wielkości jako *prawdopodobieństw przeskoków kwantowych*. Żeby taka interpretacja miała sens, δt musi być na tyle małe, aby $\sum_i p_i < 1$. Korzystając z tego, w każdym kroku czasowym decydujemy się losowo na jedną z opcji:

1. Przeskok kwantowy. Z prawdopodobieństwem δp_i następuje przeskok powiązany z operatorem C_i. Funkcja falowa po tym kroku czasowym to:

$$|\psi(t)\rangle \to \frac{C_i|\psi_i(t)\rangle}{|C_i|\psi_i(t)\rangle|}. \tag{2.39}$$

2. Brak przeskoku. Następuje to z prawdopodobieństwem $1 - \sum_i \delta p_i$, co powinno mieć miejsce w większości kroków. W tym wypadku normalizujemy obliczoną wcześniej, ewoluowaną funkcję falową:

$$|\psi(t)\rangle \to \frac{|\widetilde{\psi}(t+\delta t)\rangle}{||\widetilde{\psi}(t+\delta t)\rangle|}. \tag{2.40}$$

Poszczególne trajektorie są więc wynikiem ciągłej dysypatywnej ewolucji, przerywanej przeskokami w dyskretnych chwilach czasowych. Uśredniając po odpowiedniej liczbie trajektorii, można uzyskać zależność wartości oczekiwanej dowolnej obserwabli $\overline{\langle\psi|A|\psi\rangle}(t)$ od czasu. Będzie ona zgadzać się z przewidywaniami wynikającymi z bezpośredniego rozwiązania równania GKSL. Jednak "fizyczność" samych trajektorii może być podana w wątpliwość – w końcu, jak wspomniano, dla każdego równania GKSL istnieje cała rodzina możliwych wyborów C_i, które generować będą różne charakterystyki przeskoków. Rozumowanie takie ma słuszność, jeżeli uznajemy równanie master jako najbardziej fundamentalny opis dynamiki układu.

Taki "statystyczny" sposób myślenia był popularny zwłaszcza we wczesnych latach mechaniki kwantowej. Można przeciwstawić mu rozumowanie "stochastyczne": w każdym doświadczeniu obserwujemy przecież najpierw *pojedyncze* trajektorie. Ze względu na fundamentalnie niedeterministyczny charakter teorii podlegają one z zasady losowym fluktuacjom. Jednak to ten ewoluujący losowo stan kwantowy jest za każdym razem fundamentalnym opisem układu. Powinien być więc możliwy opis jego dynamiki bez odwoływania się do wtórnego pojęcia "zespołu statystycznego". Przykładem takiego opisu jest metoda MCWF. Ogólnie takie formalizmy badane są w ramach *kwantowego rachunku stochastycznego*. W następującym rozdziale przedstawimy kilka wyników tej dziedziny pod kątem teorii procesu ciągłego pomiaru.

2.3.2 Stochastyczne równania ruchu

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy algorytm generujący trajektorie kwantowe, które po uśrednieniu po wielu realizacjach dają rozwiązanie zgodne z równaniem GKSL. Spróbujemy teraz sformalizować tę procedurę numeryczną. Szukamy inkrementu $|\psi(t+dt)\rangle - |\psi(t)\rangle$, który skrótowo zapiszemy jako $d|\psi(t)\rangle$. W każdym kroku

czasowym z prawdopodobieństwem δp_i następuje przeskok, czyli zgodnie z (2.39):

$$d|\psi(t)\rangle_{\text{jump}} = \sum_i dN_i(t) \left(\frac{C_i}{\sqrt{\langle C_i^\dagger C_i \rangle}} - 1 \right) |\psi(t)\rangle. \tag{2.41}$$

Wprowadziliśmy tutaj skrótową notację $\langle\psi(t)|\ldots|\psi(t)\rangle \equiv \langle\ldots\rangle$ dla wartości oczekiwanej operatorów, oraz symbol $dN_i(t)$. Jest to zależna od czasu zmienna losowa (w języku matematycznym: proces stochastyczny) zdefiniowana przez

$$dN_i(t)dN_j(t) = \delta_{ij} dN_i(t) \tag{2.42}$$

$$E[dN_i(t)] = dt\langle\psi(t)|C_i^\dagger C_i|\psi(t)\rangle. \tag{2.43}$$

Pierwszy warunek oznacza, że dla każdego infinitezimalnego interwału czasowego co najwyżej jedno z $dN_i(t)$ jest równe 1, a pozostałe są równe 0. Jest to zgodne z fizycznym wymogiem, aby przeskoki następowały w dyskretnych chwilach w czasie. Drugi warunek określa częstość przeskoków, która w tym wypadku jest zadana przez (2.38). Zdefiniowany w ten sposób proces stochastyczny (tzn. losowy zbiór punktów na osi czasu) nazywany jest procesem punktowym. Całka $\int_0^t dN_i(t)dt$ zadaje całkowitą liczbę przeskoków C_i do czasu t.

Opiszemy teraz inkrement funkcji falowej związany z ewolucją pomiędzy przeskokami. Wiadomo, że dla interwału dt ten rodzaj ewolucji następuje z prawdopodobieństwem $1 - \sum dN_i(t)$ i zadany jest zasadniczo przez (2.37). Ponieważ, jak wspomnieliśmy, te odwzorowanie jest nieunitarne, musimy dodatkowo zadbać o unormowanie. Rozwinięcie (2.40) do wyrazów liniowych w δt daje nam w ten sposób

$$d|\psi(t)\rangle_{\text{no-jump}} = \left(1 - \sum_i dN_i(t)\right) dt \sum_i \left(-\frac{i}{\hbar} H_s - \frac{1}{2}(C_i^\dagger C_i - \langle C_i^\dagger C_i \rangle) \right) |\psi(t)\rangle, \tag{2.44}$$

Wyraz ten można jeszcze uprościć, uwzględniając że wyrazy typu $dN_i dt$ dają tylko infinitezymalnie mały wkład w dyskretnych punktach w czasie i przez to są pomijalne. Łącząc (2.41) i (2.44) otrzymujemy

$$d|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_S |\psi(t)\rangle dt + \sum_i \left[dN_i(t) \left(\frac{C_i}{\sqrt{\langle C_i^\dagger C_i \rangle}} - 1 \right) + dt \left(\frac{\langle C_i^\dagger C_i \rangle - C_i^\dagger C_i}{2} \right) \right] |\psi(t)\rangle. \tag{2.45}$$

Jest to tzw. stochastyczne równanie Schrödingera (ang. stochastic Schrödinger equation, SSE). Warto wspomnieć, że (2.45) nie jest jedynym stochastycznym równaniem, którego rozwiązania po uśrednieniu są zgodne z równaniem GKSL (2.35).

W rzeczywistości istnieje nieskończona liczba takich równań, zwanych w literaturze *unravellings* [Chr+22]. Obok zapisanego wyżej równania *skokowego* popularne jest także równanie *dyfuzyjne* [GP92]

$$d|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H_S|\psi(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\sum_i \Big[(C_i - \langle C_i\rangle)\,\xi_i(t) + \Big(2\langle C_i^\dagger\rangle C_i - C_i^\dagger C_i - \langle C_i^\dagger\rangle\langle C_i\rangle\Big)\,dt\Big]|\psi(t)\rangle. \quad (2.46)$$

W miejsce dyskretnej zmiennej losowej $dN_i(t)$ występuje tutaj zespolony szum gaussowski $\xi_i(t)$, z niezależną rzeczywistą i urojoną częścią, spełniający warunki

$$E[\mathrm{Re}[\xi_i(t)]\,\mathrm{Re}[\xi_j(t)]] = E[\mathrm{Im}[\xi_i(t)]\,\mathrm{Im}[\xi_j(t)]] = \delta_{ij}dt \quad (2.47)$$

$$E[\xi_i(t)] = 0 \quad (2.48)$$

$$E[\mathrm{Re}[\xi_i(t)]\,\mathrm{Im}[\xi_j(t)]] = 0 \quad (2.49)$$

Zdefiniowany w ten sposób proces stochastyczny generuje ciągłe trajektorie. Różnice między trajektoriami z (2.45) i (2.46) są widoczne na pierwszy rzut oka. Łatwo się jednak przekonać, że w obu przypadkach po uśrednieniu otrzymujemy ewolucję zadaną przez równanie master, tzn. $E[d|\psi\rangle d\langle\psi|] = \dot{\rho}dt$. Znane są również modele mieszane, przeskokowo-dyfuzyjne. Nie istnieje więc jedno słuszne SSE – jego wybór zależy od fizycznych właściwości układu oraz sposobu oddziaływania z otoczeniem lub instrumentem pomiarowym.

Rozdział 3

Model wielokrotnego pomiaru położenia i pędu cząstki kwantowej

Wstęp

W tym rozdziale przedstawimy wyniki związane z pewnym szczególnym modelem wielokrotnego pomiaru położenia i pędu cząstki kwantowej. Jest on opisany przez operatory przeskoku C_i które są *proporcjonalne* do operatorów rzutujących na stany gaussowskie o określonym położeniu i pędzie. Wygenerowane za pomocą metody MCWF trajektorie posłużą nam do obszernej analizy statystycznej szeregu scenariuszy określonych przez liczbę i rozmieszczenie detektorów, częstotliwość pomiaru oraz zewnętrzny potencjał. W celu porównania przedstawimy również jeden z alternatywnych modeli pomiaru znanych w literaturze.

3.1 Operatory przeskoku

Naszym modelowym układem jest pojedyncza cząstka kwantowa w zewnętrznym potencjale:

$$H_S = \frac{1}{2m}P^2 + V(x) \tag{3.1}$$

Cząstka obserwowana jest przez detektory α_{ij}, które są w stanie zmierzyć jej położenie i pęd. Chcemy aby pomiar był ostry, tzn. aby w jego wyniku cząstka znajdowała się w stanie czystym. Ponadto naturalnie żądamy, aby stan po pomiarze w jakiś sposób odzwierciedlał jego wynik x_i, p_j. Oczywiście nie istnieje kwantowy pomiar

jednocześnie określający pęd i położenie z dowolną dokładnością. Możliwe są natomiast stany kwantowe, których wartości oczekiwane dla operatorów położenia i pędu odpowiadają "wynikom" naszego pomiaru:

$$x_i = \langle \psi_{ij} | X | \psi_{ij} \rangle \tag{3.2}$$

$$p_j = \langle \psi_{ij} | P | \psi_{ij} \rangle, \tag{3.3}$$

i które posiadają jakieś *niepewności* ΔX i ΔP w tych zmiennych, tzn.

$$\Delta X^2 = \langle \psi_{ij} | X^2 - x_i^2 | \psi_{ij} \rangle \tag{3.4}$$

$$\Delta P^2 = \langle \psi_{ij} | P^2 - p_j^2 | \psi_{ij} \rangle. \tag{3.5}$$

W naszym wyidealizowanym scenariuszu przyjmujemy, że niepewności te minimalizują zasadę Heisenberga:

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}. \tag{3.6}$$

Stanami, które spełniają wszystkie wymienione powyżej warunki, są funkcje gaussowskie:

$$\alpha_{ij}(x) \equiv \langle x | \alpha_{ij} \rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left[-\frac{(x - x_i)^2}{4\sigma^2} + \frac{i}{\hbar} p_j x \right]. \tag{3.7}$$

W przestrzeni pędów ten stan zadany jest przez transformatę Fouriera:

$$\tilde{\alpha}_{ij}(p) \equiv \langle p | \alpha_{ij} \rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\hbar}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2}(p - p_j)^2 + \frac{i}{\hbar} x_i (p - p_j) \right]. \tag{3.8}$$

Rozrzut położeń i pędów w tym stanie to odpowiednio $\Delta X = \sigma$ i $\Delta P = \hbar/2\sigma$. W naszej pracy przyjmujemy bezwymiarowe jednostki ($\hbar = 1$). Podobnie jako jednostkę masy przyjmujemy masę cząstki $m = 1$ (por. (3.1)). Problem swobodnej cząstki nie wyróżnia żadnej skali długości. Natomiast w modelu cząstki monitorowanej przez detektory naturalnymi skalami długości są rozdzielczość detektorów σ i ich odległość d (patrz niżej). W naszej pracy jednostkę długości a_0 wybieramy tak, aby $\sigma/a_0 = 1/\sqrt{2}$. Dzięki temu szerokość funkcji falowej w reprezentacji położeń (3.7) i pędów (3.8) będzie miała numerycznie tę samą wartość. Wybór tych trzech jednostek wyznacza, w jakich jednostkach mierzymy wszystkie inne wielkości fizyczne. Na przykład (bezwymiarową) jednostką czasu w naszych rachunkach jest $\tau_0 = m\sigma^2/\hbar$.

Wróćmy teraz do definicji podstawowych wielkości naszego modelu. Aby stan po pomiarze był funkcją (3.7), operatory pomiaru C_{ij} powinny być proporcjonalne do operatorów rzutowych:

$$C_{ij} = \sqrt{\gamma_{ij}} |\alpha_{ij}\rangle\langle\alpha_{ij}| \tag{3.9}$$

Utożsamiamy C_{ij} z operatorami przeskoku występującymi w stochastycznym równaniu Schrödingera (2.45). Dynamika naszego układu jest więc zadana równaniem:

$$d|\psi(t)\rangle = \sum_{ij} dN_{ij}(t)\left(e^{i\phi_{ij}(t)}|\alpha_{ij}\rangle - |\psi(t)\rangle\right) + \delta t\left(\gamma_{ij}\frac{|q_{ij}(t)|^2 - q_{ij}(t)|\alpha_{ij}\rangle}{2} - \frac{i}{\hbar}H_s|\psi(t)\rangle\right) \tag{3.10}$$

Wprowadziliśmy tutaj przekrycie (ang. overlap) funkcji falowej cząstki z detektorem $|\alpha_{ij}\rangle$

$$q_{ij}(t) = \langle\alpha_{ij}|\psi(t)\rangle. \tag{3.11}$$

ϕ_{ij} jest nieistotną w praktyce (przynajmniej w przypadku pojedynczej cząstki, czego dotyczy ta praca) fazą, którą funkcja falowa nabiera w przypadku przeskoku. Natomiast $dN_{ij}(t)$ jest zdefiniowane analogicznie do (2.42) i (2.43):

$$dN_{ij}(t)dN_{i'j'}(t) = \delta_{ii'}\delta_{jj'}dN_{ij}(t) \tag{3.12}$$

$$E[dN_{ij}(t)] = \gamma_{ij}\delta t|q_{ij}|^2 \equiv \delta p_{ij}. \tag{3.13}$$

W przeciwieństwie do ogólnego przypadku przyjmujemy od teraz, że wielkości $\gamma_{ij} = \gamma$ są jednakowe dla wszystkich przeskoków C_{ij}. Liczba γ stanowi kluczowy parametr naszego modelu, opisujący "intensywność", z jaką monitorowana jest cząstka. Ponadto przyjmujemy, że zdefiniowane wg. (3.7) detektory tworzą regularną siatkę w przestrzeni fazowej, tzn. że możliwe wyniki pomiaru są dyskretne:

$$x_i = i \cdot d_x \tag{3.14}$$

$$p_j = j \cdot d_p, \tag{3.15}$$

gdzie i i j są liczbami całkowitymi. d_x i d_p są odległościami między dwoma sąsiednimi detektorami i stanowią kolejne parametry charakteryzujące konkretną realizację naszego modelu. W ramach niniejszej pracy interesuje nas sytuacja, w której położenie i pomiar mierzone są "z jednakową dokładnością". Dlatego wykorzystując wyżej zdefiniowane bezwymiarowe jednostki, przyjmujemy, że odległość sąsiadujących detektorów w przestrzeni położeń i pędów jest identyczna: $d = d_x = d_p$. Fizycznie oznacza to, że stosunek odległości między dwoma sąsiadującymi detektorami do szerokości ich funkcji falowych jest taki sam w przestrzeni położeń i pędów: $d_x/\Delta X = d_p/\Delta P = \sqrt{2}d$. W ten sposób ograniczyliśmy liczbę swobodnych parametrów naszego modelu do dwóch: γ i d.

Dodajemy w tym miejscu, że powyższy model daje się trywialnie uogólnić do wyższych wymiarów – wystarczy zastąpić funkcje $\alpha_{ij}(x)$ przez

$$\alpha_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{d/4}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x_i})^2}{4\sigma^2} + i\mathbf{p_j}\cdot\mathbf{x}\right], \tag{3.16}$$

gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem d-wymiarowym, a położenia detektorów w przestrzeni fazowej są oznaczone przez wektory $(\mathbf{x_i}, \mathbf{p_j})$. Uogólnienie do wyższych wymiarów znacznie utrudnia obliczenia numeryczne i nie prowadzi do znaczących różnic w kwestii zjawisk opisanych w tej pracy. Stąd przeważnie ograniczamy się do rachunków jednowymiarowych.

Warto zauważyć, że pomimo iż operatory C_{ij} są rzutowe, zdefiniowany wyżej model ciągłego pomiaru cząstki nie jest tożsamy z losowym wykonywaniem przedstawionego w rozdziale 2.1 zwykłego pomiaru rzutowego. Zaproponowane równanie uwzględnia efekt *ciągłej* obserwacji – cząstka oddziałuje z otoczeniem detektorów także pomiędzy przeskokami, co prowadzi do nietrywialnej ewolucji: ze względu na zależność od $q_{ij}(t)$ (3.10) jest nieliniowym równaniem różniczkowym. Nietrywialna ewolucja $|\psi(\mathbf{x},t)|^2$ jest zobrazowana na wykresie 3.1.

Głównym przedmiotem kolejnych rozdziałów będzia analiza trajektorii zgodnych z (3.10) i wygenerowanych za pomocą metody MCWF przedstawionej w rozdziale 2.3.1. Jak wyjaśniono w tamtej części, uśrednienie po wielu trajektoriach $\overline{|\psi\rangle\langle\psi|}(t)$ daje macierz gęstości $\rho(t)$ uzyskaną z odpowiedniego równania GKSL. Nie będziemy z niego bezpośrednio korzystać, ze względu na powszechność tego formalizmu podajemy je jednak dla kompletności:

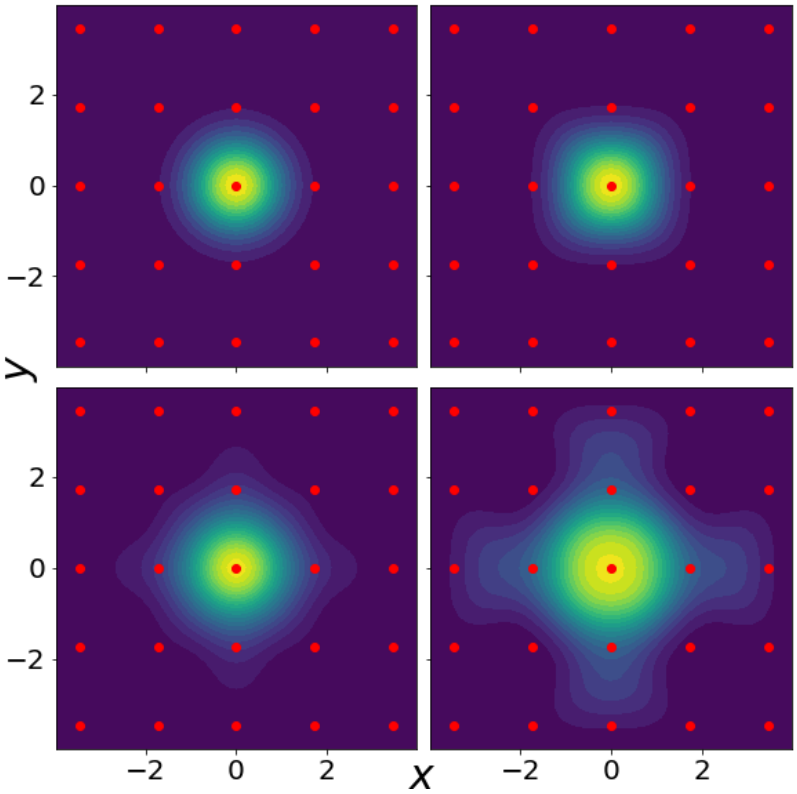
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H_S,\rho] + \gamma\sum_{ij}\left[|\alpha_{ij}\rangle\langle\alpha_{ij}|\rho|\alpha_{ij}\rangle\langle\alpha_{ij}| - \frac{1}{2}\left(|\alpha_{ij}\rangle\langle\alpha_{ij}|\rho + \rho|\alpha_{ij}\rangle\langle\alpha_{ij}|\right)\right] \tag{3.17}$$

Występująca tu wielkość $\langle\alpha_{ij}|\rho(t)|\alpha_{ij}\rangle$ będzie również kluczowa w naszej procedurze numerycznej – uwzględniając założenie, że w poszczególnych realizacjach przez cały czas pracujemy ze stanem czystem $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Zgodnie z MCWF, w każdym kroku czasowym δt musimy obliczyć prawdopodobieństwa przeskoku, zadane przez

$$\delta p_{ij} = \gamma\delta t\langle\alpha_{ij}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\alpha_{ij}\rangle = \gamma\delta_t|q_{ij}|^2 \tag{3.18}$$

Ta wielkość może się kojarzyć z reprezentacją Q stanu kwantowego ρ (zwaną również reprezentacją Husimiego) zdefiniowaną przez

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle, \tag{3.19}$$



Rysunek 3.1: Ewolucja funkcji falowej cząstki kwantowej w dwóch wymiarach, otoczonej siatką detektorów zaznaczonych przez czerwone punkty. W przeciwieństwie do zwyczajnej dysypacji kwantowej, funkcja falowa skupia się także wokół sąsiednich detektorów. Przedruk za zgodą rys. 1 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

gdzie α jest dowolnym stanem koherentnym. Funkcja $Q(\alpha)$ reprezentuje dowolny stan kwantowy, ponieważ stany koherentne stanowią (nadzupełną) bazę przestrzeni Hilberta. Jest to często wykorzystywane m.in. w optyce kwantowej. Widać, że wprowadzony wyżej zbiór $|q_{ij}|^2$ może być postrzegany jako zdyskretyzowana reprezentacja Husimiego stanu kwantowego cząstki, lub odwrotnie, że w granicy nieskończenie gęstych detektorów $d \to 0$, tzn. gdy $|\alpha_{ij}\rangle$ jest dowolnym stanem koherentnym, otrzymujemy funkcję Husimiego.

Granica gęstych detektorów

Chcemy zauważyć w tym miejscu, że w granicy $d \to 0$ możliwe jest istotne uproszczenie problemu. Granica ta jednak jest tylko fizyczna przy jednoczesnym $\gamma \to 0$, tak że iloraz $\gamma/d^2 = \text{const}$. W przeciwnym razie całkowite prawdopodobieństwo przeskoku w kroku czasowym δt, zadane przez:

$$\sum_{ij} \delta p_{ij} = \gamma \delta t \sum_{ij} |q_{ij}|^2 \tag{3.20}$$

$$\approx \frac{\gamma}{d^2} \delta t \int |\langle \psi | \alpha \rangle|^2 d^2\alpha \tag{3.21}$$

$$= \frac{\gamma \pi}{d^2} \delta t, \tag{3.22}$$

dążyłoby do nieskończoności. Jak zobaczymy później, współczynnik γ/d^2 zadaje tzw. stałą dyfuzji. Jak widzimy, w granicy gęstych detektorów, całkowite prawdopodobieństwo przeskoku jest stałe w czasie. Uproszczone stochastyczne równanie Schrödingera (3.10), wykorzystując definicję (3.19), przyjmuje postać:

$$d|\psi(t)\rangle = \int dN_\alpha(t) \left(c|\alpha\rangle - |\psi(t)\rangle\right) d^2\alpha + \frac{\gamma\pi}{2d_x d_p} \delta t \left(1 - \int Q(\alpha)|\alpha\rangle d^2\alpha\right) - \delta t \frac{i}{\hbar} H_s |\psi(t)\rangle \tag{3.23}$$

3.2 Cząstka swobodna

Zbadamy teraz przypadek, dla którego w (3.1) $V(x) = 0$, tzn. przypadek cząstki swobodnej. Będziemy przy tym przechodzili stopniowo od układu możliwie najprostszego, tj. od cząstki monitorowanej przez pojedynczy detektor, przez przypadek dwóch detektorów, aż do cząstki obserwowanej przez siatkę nieskończenie wielu mierników.

3.2.1 Jeden detektor

Ściśle związany ze szczególną rola pomiaru w mechanice kwantowej jest tak zwany *efekt Zenona*. Polega on na tym, że częsty lub stały pomiar układu kwantowego

prowadzi do spowolnienia lub "zamrożenia" jego dynamiki [MS77]. Zjawisko to zostało zaobserwowane m.in. w szeregu eksperymentów z zimnymi atomami [Ita+90; FGR01; Lei+03]. Wiadomo jednak, że zależnie od charakterystyki układu i parametrów pomiaru, możliwe jest też zachowanie przeciwne – w wyniku obserwacji stan kwantowy może np. szybciej przejść ze stanu niestabilnego do stabilnego. Takie przypadki *przyspieszonej* ewolucji nazywane są *anty-efektem Zenona* [LR00]. Zamierzamy zatem zbadać, czy częsty pomiar wg. proponowanego tutaj modelu doprowadzi do któregoś z tych zjawisk.

Rozważamy przypadek jednego detektora w $x = 0$ który jest w stanie zmierzyć niezerowy pęd $p = p_0$. Ma on największe prawdopodobieństwo wykrycia cząstki, która

1. znajduje się w podobnym położeniu $x \simeq 0$ oraz
2. której pęd $p \propto m\frac{1}{2}\mathrm{Im}[\psi\nabla\psi]$ jest bliski pędowi mierzonemu $p \simeq p_0$.

Dla uproszczenia przyjmiemy, że na początku cząstka znajduje się w stanie $|\alpha_0 = (0, p_0)\rangle$. Ewolucja przebiega następująco: Cząstka oddala się z prędkością p_0/m od detektora. Po pewnym losowym czasie powinna zostać jednak przez niego złapana, co sprawi że powróci ona do punktu stanu początkowego. Spodziewamy się, że proces ten może powtórzyć się kilka lub wiele razy. Pytanie brzmi, czy cząstce ostatecznie uda się "uciec" od detektora, tzn. znaleźć się na tyle daleko, aby prawdopodobieństwo kolejnego pomiaru było pomijalne, i jeśli tak, po jakim czasie należałoby się spodziewać tej ucieczki.

Na początek zapiszemy stochastyczne równanie różniczkowe, wyznaczające dynamikę cząstki:

$$d|\psi(t)\rangle = dN_0(t)\left(|\alpha_0\rangle - |\psi(t)\rangle\right) + \delta t\left(\gamma\frac{|\langle\alpha_0|\psi(t)\rangle|^2 - \langle\alpha_0|\psi(t)\rangle|\alpha_0\rangle}{2} - \frac{i}{\hbar}H_s|\psi(t)\rangle\right) \tag{3.24}$$

Przed pełną analizą problemu rozważymy przypadki graniczne.

Przypadki graniczne

Przypomnijmy, że prawdopodobieństwo złapania w infinitezymalnym interwale czasowym δt zadana jest przez (3.18). Bardziej praktyczne jest rozważanie zmiennej w czasie *intensywności* kliknięć $\lambda_\mu(t)$ w danej realizacji μ, zdefiniowanej przez

$$\lambda_\mu(t) \equiv \frac{\delta p}{\delta t} = \gamma|\langle\alpha_0|\psi(t)\rangle|^2. \tag{3.25}$$

Dla krótkich czasów stan cząstki nie zdążył jeszcze odbiec znacząco od stanu początkowego $|\alpha_0\rangle$. Możemy wtedy przybliżyć intensywność przez $\lambda_\mu \approx \gamma$. Widzimy, że parametr γ kontroluje *częstość* łapania cząstki przez detektor. Jego odwrotność $\tau = 1/\gamma$ ma wymiar czasu i stanowi pierwsze przybliżenie tego, kiedy możemy spodziewać się ponownego pomiaru.

Sprecyzujmy, pod jakimi warunkami takie przybliżenie jest słuszne. To, jak szybko stan $|\psi(t)\rangle$ odbiega od $|\alpha_0\rangle$, scharakteryzowane jest przez dwie skale czasu. Pierwsza z nich to $\tau_1 = m\sigma/p_0$, gdzie σ to szerokość funkcji falowej $\alpha_0(x)$ (por. (3.7)) i określa czas, po jakim klasycznie biegnąca cząstka opuści obszar "obserwowany" przez detektor. Druga $\tau_2 = 2m\sigma^2/\hbar$ jest czasem charakterystycznym rozpływania się paczki falowej ze względu na dyspersję kwantową. Łącząc oba warunki, możemy powiedzieć że dla czasów

$$t \ll \min(\tau_1, \tau_2) \tag{3.26}$$

funkcja falowa cząstki jest wciąż dość podobna do stanu detektora i nie zdołała się zbytnio od niego oddalić.

Powyższe oszacowania nie uwzględniły oddziaływania cząstki z detektorem, czyli pominięte zostały wyrazy proporcjonalne do γ w (3.24). Przybliżenie to jest z pewnością prawidłowe dla $t \ll 1/\gamma$. Można rozważyć jeszcze granicę przeciwną – scenariusz, w którym dominuje efekt obserwacji. Zachodzi on, gdy hermitowski Hamiltonian H_S w (3.24) jest pomijalny, tzn.

$$\frac{\hbar p_0^2}{m} \ll \gamma. \tag{3.27}$$

Pomijając H_S, analityczne rozwiązanie problemu staje się trywialne. Zgodnie z procedurą MCWF (por. (2.36)), pomiędzy przeskokami stan kwantowy ewoluuje zgodnie z niehermitowskim Hamiltonianem

$$H_0 = \frac{i\gamma}{2}|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|, \tag{3.28}$$

przy czym należy go jeszcze normalizować. Zakładając stan początkowy $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$, dostajemy

$$|\psi(t)\rangle \sim e^{-iH_0 t}|\alpha_0\rangle \sim |\alpha_0\rangle. \tag{3.29}$$

Widzimy więc, że w granicy intensywnej obserwacji stan $|\alpha_0\rangle$ jest stacjonarny. W tej granicy intensywność klikania jest stała w czasie i równa γ. Taki ciąg dyskretnych losowych zdarzeń w czasie nazywany jest procesem Poissona. Rozkład prawdopodo-

bieństwa czasów pomiędzy kliknięciem jest wykładniczy:

$$f_{T_1}(t) = e^{-\gamma t}, \tag{3.30}$$

natomiast prawdopodobieństwo dokonania n obserwacji w czasie t wynosi

$$P_{capt}(n) = \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma t} \tag{3.31}$$

Przyjrzymy się teraz przypadkowi dowolnie długich czasów, w którym żadna ze składowych ewolucji nie jest pomijalna.

Przypadek ogólny

W przypadku ogólnym intensywność $\lambda_\mu(t)$ procesu przeskakiwania do stanu detektora $|\alpha_0\rangle$ jest zależna od czasu (por. (3.25)). Ponieważ zależy ona od losowych momentów przeskoku, jest to wielkość stochastyczna, różna w każdej realizacji, co oznaczamy przez indeks μ. Oznaczamy teraz przez $\lambda(t)$ intensywność złapania cząstki przez detektor przy założeniu, że w chwili $t = 0$ cząstka była w stanie $|\alpha_0\rangle$, oraz że nie było *żadnych przeskoków* do czasu t. Jest to więc uniwersalna funkcja charakteryzująca ten proces stochastyczny.

Wracając do naszego pytania, oczywistym warunkiem koniecznym, aby cząstka mogła uciec od detektora jest

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0. \tag{3.32}$$

Rachunki numeryczne potwierdzają, że warunek ten jest spełniony dla dowolnych γ. Zakładając zupełny brak przeskoków w danej realizacji, opisany tutaj scenariusz jest tożsamy z *niejednorodnym procesem Poissona* (NPP) z intensywnością $\lambda(t)$. Wiadomo, że dla NPP prawdopodobieństwo braku zdarzeń w interwale $[0, t]$ jest zadane przez wzór

$$P(N = 0) = e^{-\Lambda(t)}, \tag{3.33}$$

gdzie wprowadziliśmy

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t')dt'. \tag{3.34}$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo natychmiastowej ucieczki cząstki od detektora (bez choćby jednokrotnego złapania przez detektor) uzyskamy przez obliczenie (3.33) w granicy $t \to \infty$, co symbolicznie oznaczamy przez

$$P_0 = e^{-\Lambda_\infty}, \tag{3.35}$$

gdzie $\Lambda_\infty = \int_0^\infty \lambda(t')dt'$. Rozważmy teraz scenariusz, w którym cząstka jest złapana jeden raz po czasie t', w wyniku czego wraca do stanu początkowego, a następnie ponownie ucieka od detektora. Niech całość ma miejsce na interwale $[0, T]$, a moment przeskoku nastąpi w infinitezymalnym kroku czasowym dt'. Wtedy prawdopodobieństwo tego procesu zadane jest przez

$$e^{-\Lambda(t')}\lambda(t')dt'e^{-\Lambda(T-t')}. \tag{3.36}$$

Jeżeli cząstka ma być złapana tylko raz, a następnie uciec dowolnie daleko od detektora, musimy wziąć granicę $T \to \infty$. Wtedy wyraz $e^{-\Lambda(T-t')}$ można zastąpić przez $e^{-\Lambda_\infty} = P_0$. Ponadto, jeśli zakładamy że przeskok może nastąpić w dowolnej chwili t', należy scałkować powyższe wyrażenie po tej zmiennej. Wynikiem takiego rachunku jest

$$P_1 = P_0(1 - P_0). \tag{3.37}$$

Analogiczne rozumowanie pozwala nam obliczyć prawdopodobieństwo scenariusza w którym cząstka jest łapana dwukrotnie zanim ucieknie od detektora. Zakładamy wtedy czasy złapania t' i t'', które mają miejsce w interwale $[0, T]$. Bez utraty ogólności przyjmujemy, że t' znajduje się w interwale $[0, T]$ a t'' w $[t', T]$. To zadaje nam granice podwójnej całki po wyrazie analogicznym do (3.36). Jako wynik otrzymujemy

$$P_2 = P_0(1 - P_0)^2. \tag{3.38}$$

W ogólnym przypadku (tj. n złapań a następnie ucieczka) prawdopodobieństwo wynosi

$$P_n = P_0(1 - P_0)^n. \tag{3.39}$$

Powyższe równanie to rozkład geometryczny. Jego wartość oczekiwana

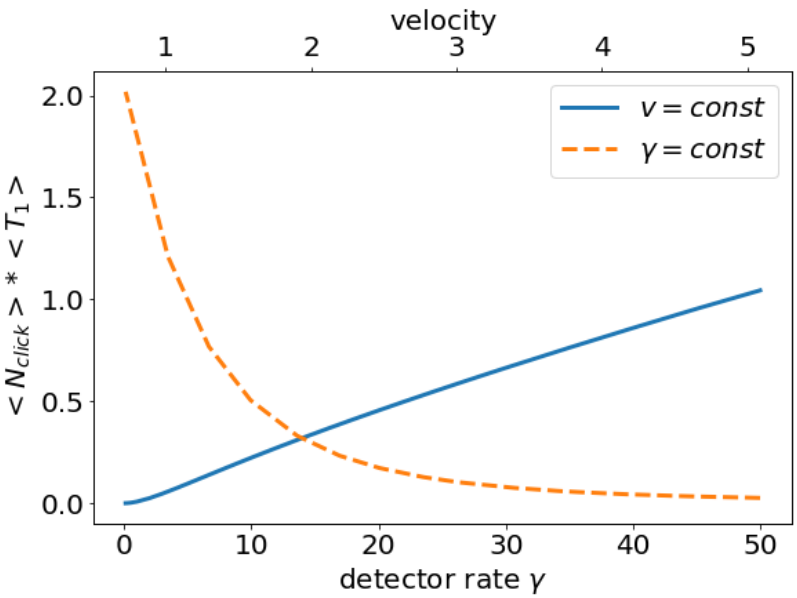
$$\langle N_{click} \rangle = e^{\Lambda_\infty} - 1, \tag{3.40}$$

to średnia liczba złapań, która nastąpi przed ucieczką. Rozważmy teraz średni czas pomiędzy kolejnymi kliknięciami. Ze względu na powtarzalny charakter procesu, jest on tożsamy ze średnim czasem do pierwszego kliknięcia $\langle T_1 \rangle$. Rozkład tej zmiennej jest znany z teorii niejednorodnego procesu Poissona

$$f_{T_1} = \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}. \tag{3.41}$$

Oznacza to, że średni czas pomiędzy kliknięciami to

$$\langle T_1 \rangle = \int_0^\infty t f_{T_1}(t)dt. \tag{3.42}$$



Rysunek 3.2: Czas ucieczki od pojedynczego detektora T_{esc}. Linia niebieska przedstawia czas ucieczki jako funkcję intensywności pomiaru γ, zakładając prędkość cząstki $v = 2$. Linia pomarańczowa oznacza czas ucieczki jako funkcję v (skala znajduje się u górnej osi ilustracji) dla stałego $\gamma = 15$. Przedruk za zgodą rys. 5 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

Pozwala nam to oszacować średni czas ucieczki: jest to średnia liczba powrotów do detektora pomnożona przez średni czas między dwoma powrotami, $T_{esc} = \langle N_{click} \rangle \langle T_1 \rangle$:

$$T_{esc} = \left(e^{\Lambda(T)} - 1\right) \int_0^\infty t\lambda(t) e^{-\Lambda(t)} dt \tag{3.43}$$

Wykres 3.2 przedstawia T_{esc} jako funkcję parametru γ oraz prędkości $v_0 = p_0/m$, powiązanej ze stanem $|\alpha_0 = (0, p_0)\rangle$ na który rzutuje detektor. Wyniki te zostały uzyskane przez numeryczne obliczenie funkcji $\lambda(t)$ dla różnych par (γ, v_0) a następnie wyznaczenie powyższej całki. Zależność czasu ucieczki od γ jest w przybliżeniu liniowa: im intensywniejszy pomiar, tym więcej czasu zajmuje ucieczka. Na podstawie obliczeń numerycznych stwierdzamy, że czas ucieczki skaluje się jak $T_{esc} \sim 1/v^\kappa$, gdzie wykładnik κ leży między 2 a 3. Im większa prędkość, jaką cząstka ma z początku (lub po złapaniu), tym krótszy czas ucieczki.

3.2.2 Dwa detektory

Rachunki w poprzednim rozdziale dążyły do odpowiedzi na pytania o "ucieczkę" cząstki od detektora, rozumianej jako sytuacja w której cząstka oddali się na dowolnie dużą odległość od jego położenia. W przypadku więcej niż jednego miernika praktyczniejsze staje się jednak pytanie, kiedy cząstka od detektora α w punkcie

wyjścia dostanie się do jego *najbliższego sąsiada* β. Dlatego w tym miejscu przedstawimy krótką analizę cząstki monitorowanej przez dwa detektory.

Na początek rozważymy znów rozwiązywalny analitycznie przypadek graniczny, który pozwoli nam uzyskać pewną intuicję odnośnie dynamiki układu. Niech detektory mają położenia $\alpha = (x = 0, p_0 = 0)$ i $\beta = (x = d, p_0 = 0)$ w przestrzeni fazowej. To znaczy, że są oddalone o dystans d, a cząstka ma zerowy lub pomijalnie mały pęd. Ponadto zakładamy wysoką intensywność obserwacji γ. W następujących rachunkach α i β oznaczają detektory, a $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ stany cząstki po detekcji przez jednego z nich. Zgodnie z procedurą MCWF układ między przeskokami ewoluuje z Hamiltonianem

$$H = -\frac{i\gamma}{2}\Big(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|\Big). \tag{3.44}$$

Zakładamy stan początkowy $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$. Dla (nienormalizowanego) stanu po czasie t otrzymujemy

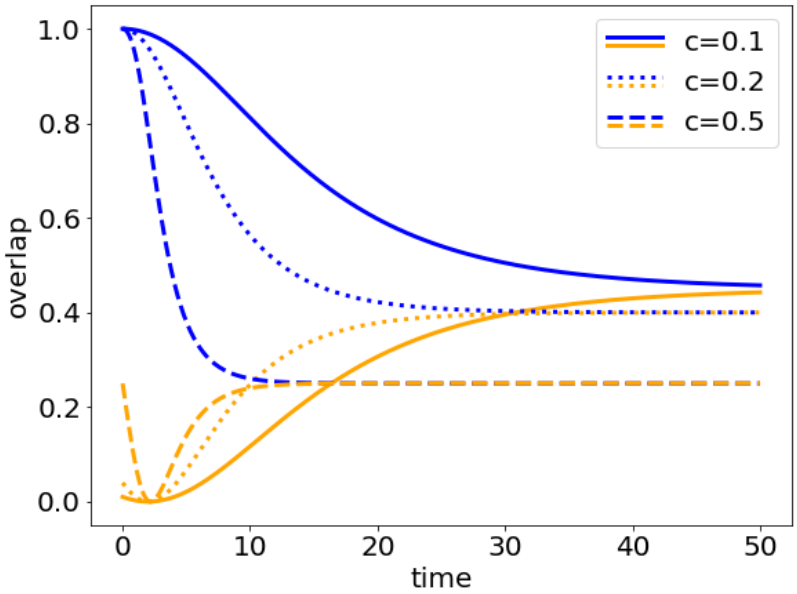
$$e^{-iHt}|\alpha\rangle = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cosh\frac{c\gamma t}{2}|\alpha\rangle - \frac{c^*}{|c|}e^{-\frac{\gamma t}{2}}\sinh\frac{c\gamma t}{2}|\beta\rangle, \tag{3.45}$$

gdzie wprowadziliśmy $c = \langle\alpha|\beta\rangle$. Jak w poprzednim rozdziale, kluczowym elementem analizy są funkcje $\lambda_\alpha(t)$ i $\lambda_\beta(t)$, które opisują intensywność przeskoku do α i β pod warunkiem *braku przeskoku* do czasu t. Wystarczy normalizować (3.45) i policzyć przekrycia ze stanami detektorów:

$$\lambda_\alpha(t) = \gamma\frac{|\langle\alpha|e^{-iHt}|\alpha\rangle|^2}{||e^{-iHt}|\alpha\rangle||^2} = \gamma\frac{\left(\cosh\frac{t}{t_0} - |c|\sinh\frac{t}{t_0}\right)^2}{\cosh\frac{2t}{t_0} - \sinh\frac{2t}{t_0}}, \tag{3.46}$$

$$\lambda_\beta(t) = \gamma\frac{|\langle\beta|e^{-iHt}|\alpha\rangle|^2}{||e^{-iHt}|\alpha\rangle||^2} = \gamma\frac{\left(|c|\cosh\frac{t}{t_0} - \sinh\frac{t}{t_0}\right)^2}{\cosh\frac{2t}{t_0} - \sinh\frac{2t}{t_0}}, \tag{3.47}$$

Wprowadziliśmy tutaj charakterystyczny czas $t_0 = 2/\gamma|c|$. Parametr przekrycia $c \sim \exp(-d^2/4)$ dla dużych odległości między detektorami szybko staje się bardzo mały. t_0 daje nam pierwsze oszacowanie czasu przejścia z detektora α do β. Funkcje $\lambda_\alpha(t)$ i $\lambda_\beta(t)$ przedstawione są na rysunku 3.3. Wykresy te wskazują na dwie interesujące cechy problemu: po pierwsze, dla długich czasów $\lambda_\alpha(t)$ i $\lambda_\beta(t)$ zbiegają do tej samej wartości. Oznacza to, że jeśli w ramach konkretnej realizacji przez dłuższy czas ($t \gg t_0$) nie zaobserwowaliśmy detekcji, możemy spodziewać się jej kolejnym razem z równym prawdopodobieństwem w α i β. Po drugie, widzimy że $\lambda_\beta(t)$ zawsze ma minimum, które jednocześnie jest miejscem zerowym. Punkt ten zadany jest przez równanie $|c|\cosh\frac{t}{t_0} - \sinh\frac{t}{t_0} = 0$, które zawsze ma rozwiązanie ponieważ $|c| < 1$.



Rysunek 3.3: Zależność czasowa $\frac{1}{\gamma}\frac{\delta p_\alpha}{\mathrm{d}t} = |\langle\alpha|e^{-iHt}|\alpha\rangle|^2 \equiv \frac{1}{\gamma}\lambda_\alpha$ (górne niebieskie linie) i $\frac{1}{\gamma}\frac{\delta p_\beta}{\mathrm{d}t} = |\langle\beta|e^{-iHt}|\alpha\rangle|^2 \equiv \frac{1}{\gamma}\lambda_\beta$ (dolne pomarańczowe linie) intensywności złapania cząstki przez detektor α lub β, dla stanu początkowego $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, zakładając brak przeskoków w międzyczasie. Przedruk za zgodą rys. 4 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

Wynosi ono

$$t_\beta = t_0 \mathrm{artanh}(|c|). \tag{3.48}$$

Jest to moment, w którym możemy być pewni braku detekcji w β.

Bardziej ścisłą odpowiedź na pytanie, kiedy cząstka pojawi się w β, umożliwi nam analiza analogiczna do tej z poprzedniego rozdziału. Wprowadzamy najpierw intensywność detekcji w dowolnym detektorze $\lambda(t) = \lambda_\alpha(t) + \lambda_\beta(t)$, oraz jej całkę $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t')dt'$. Rozważamy najpierw proces, w którym przez czas t mamy brak kliknięć, po czym następuje kliknięcie od razu w β w interwale dt. Jeżeli następnie przyjmiemy, że nie interesuje nas konkretny czas tego kliknięcia, a jedynie całkowite prawdopodobieństwo scenariusza, musimy scałkować wyrażenie po t:

$$P_\beta = \int_0^\infty \lambda_\beta(t) e^{-\Lambda(t)} dt \tag{3.49}$$

Jak łatwo udowodnić, zdarzenie przeciwne o prawdopodobieństwie $1 - P_\beta$ w tym wypadku jest równe prawdopodobieństwu, że detekcja nastąpi w α:

$$1 - P_\beta = P_\alpha = \int_0^\infty \lambda_\alpha(t) e^{-\Lambda(t)} dt \tag{3.50}$$

Są to jedyne dwie możliwości, tzn. nie jest możliwa "ucieczka" od obu detektorów jak w rozdziale 3.2.1, ponieważ w Hamiltonianie (3.44) wykluczyliśmy część kinetyczną $P^2/2m$. Powoduje to, że dynamika jest ograniczona do dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta rozpiętej przez $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ (por. (3.45)). Niezależnie od tego, ogólne prawdopodobieństwo P_n znalezienia cząstki w stanie β po n przeskokach cofających ją do α jest znów zadane przez rozkład geometryczny

$$P_n = P_\beta(1 - P_\beta)^n \tag{3.51}$$

Pozwala nam to przepisać wszystkie wyniki z rozdziału 3.2.1: średni czas między kolejnym powrotem cząstki do α to

$$\langle T_\alpha \rangle = \int_0^\infty t\lambda_\alpha(t)e^{-\Lambda(t)}dt. \tag{3.52}$$

Podobnie średni czas dla kliknięcia w detektorze β następującego po kliknięciu detektora α to

$$\langle T_\beta \rangle = \int_0^\infty t\lambda_\beta(t)e^{-\Lambda(t)}dt. \tag{3.53}$$

Średnia liczba powrotów cząstki do α to

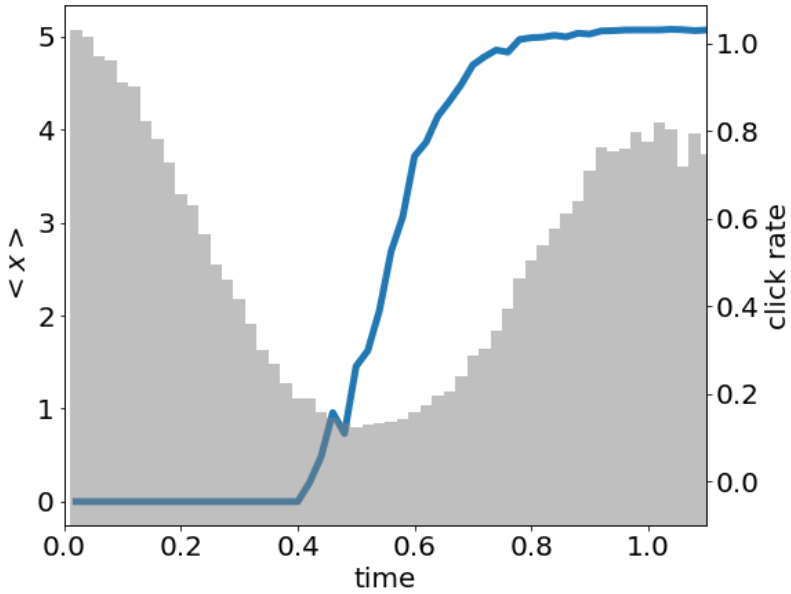
$$\langle N_{click} \rangle = \frac{1}{P_\beta} - 1. \tag{3.54}$$

Pozwala nam to zapisać szacowany czas przejścia do β:

$$T_{esc} = \left(\frac{1}{P_\beta} - 1\right)\int_0^\infty t\lambda_\alpha(t)e^{-\Lambda(t)}dt + \int_0^\infty t\lambda_\beta(t)e^{-\Lambda(t)}dt \tag{3.55}$$

Pierwszy wyraz w tej sumie to czas spędzony na powrotach cząstki do α, a drugi (zazwyczaj pomijalny) to czas średnio potrzebny aby przejść z α do β. T_{esc} typowo jest znacząco większy od wprowadzonego wcześniej charakterystycznego czasu t_0, który należy traktować raczej jako dolną granicę interesującego nas przejścia z α do β. Warto zauważyć, że po złapaniu w β cały proces powtarza się, przy czym we wszystkich powyższych równaniach α i β zamieniają się rolami. Jest to tzw. zamienny proces odnowy (ang. alternating renewal process).

Powyższe rachunki wykonane były przy założeniu pomijalnej energii kinetycznej cząstki. Przedstawiony schemat jest jednak na tyle ogólny, że można go zastosować w przypadku bardziej skomplikowanych Hamiltonianów, np. większej liczby detektorów albo dopuszczając człon $P^2/2m$. Oczywiście należy się spodziewać, że uzyskanie analitycznej postaci jak w (3.46) i (3.47) stanie się wtedy bardzo trudne lub niemożli-



Rysunek 3.4: Statystyka detekcji dla cząstki monitorowanej przez dwa detektory $\alpha = (x = 0, p = 5)$ i $\beta = (x = 5, p = 5)$. Stan początkowy cząstki to $|\alpha\rangle$ a intensywność pomiaru wynosi $\gamma = 1$. Niebieska krzywa przedstawia średnie położenie cząstki zgodnie z wynikami pomiarów. Szary histogram oznacza całkowitą normalizowaną częstotliwość kliknięć. Przedruk za zgodą rys. 7 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

we. Numeryczne wyznaczenie tych funkcji jest jednak stosunkowo łatwe, co pozwala na wykorzystanie wszystkich pozostałych podanych tu wzorów.

Na koniec tego rozdziału przedstawiamy wynik numeryczny uzyskany za pomocą symulacji wielu trajektorii metodą MCWF. Zakłada on Hamiltonian z członem kinetycznym oraz dwa detektory w położeniach $\alpha = (x = 0, p = 5)$ i $\beta = (x = 5, p = 5)$. Dla każdej z trajektorii cząstka początkowo znajduje się w stanie $|\alpha\rangle$. Poza tym przyjmujemy intensywność pomiaru $\gamma = 1$. Na rysunku 3.4 niebieska krzywa przedstawia "średnie położenie" cząstki jako funkcję czasu. Została ona obliczona jako średnia pomiarów w małych przedziałach czasu, uwzględniając pierwszą, czyli położeniową, składową każdego pomiaru. Szary histogram w tle oznacza częstotliwość kliknięć jako funkcję czasu. Jest to po prostu normalizowana całkowita liczba kliknięć w każdym interwale czasowym.

Jak widać, średnie położenie cząstki znacząco odbiega od klasycznej trajektorii, tj. prostej linii. Z początku ($t < 0.5$) cząstka mierzona jest wyłącznie w α, stąd jej średnie położenie wynosi 0. Z czasem coraz większa liczba pomiarów odpowiada kliknięciu w β. Proces ten jest "nieodwracalny" ze względu na niezerową prędkość jaką ma paczka falowa w każdej chwili. Całkowita częstość detekcji ma minimum

około $t = 0.5$. Wynika to stąd, że w większości przypadków funkcja falowa cząstki nie ma wtedy znaczącego przekrycia z żadnym z detektorów.

3.2.3 Szereg detektorów

Wracamy teraz do ogólnego scenariusza przedstawionego u początku rozdziału 3, tzn. cząstki monitorowanej przez nieskończony szereg równomiernie rozmieszczonych detektorów. Przypomnijmy, że wielkość d oznacza odległość między sąsiadującymi detektorami w przestrzeni położeń i pędów. Najpierw rozważymy przypadek rzadko rozmieszczonych detektorów, tzn. $d > \sigma$, gdzie σ jest szerokością stanu detektora $\alpha_{ij}(x)$ (por. (3.7)), ponieważ ujawnia on najbardziej różnorodną dynamikę. Rozważamy cząstkę o niezerowym pędzie początkowym, który może się zmienić w wyniku przeskoku. Ponownie wprowadzamy amplitudy przeskoku

$$\lambda_i(t) = \gamma \sum_j |\langle \alpha_{ij}|e^{-iHt}|\alpha_0|\rangle|^2 \tag{3.56}$$

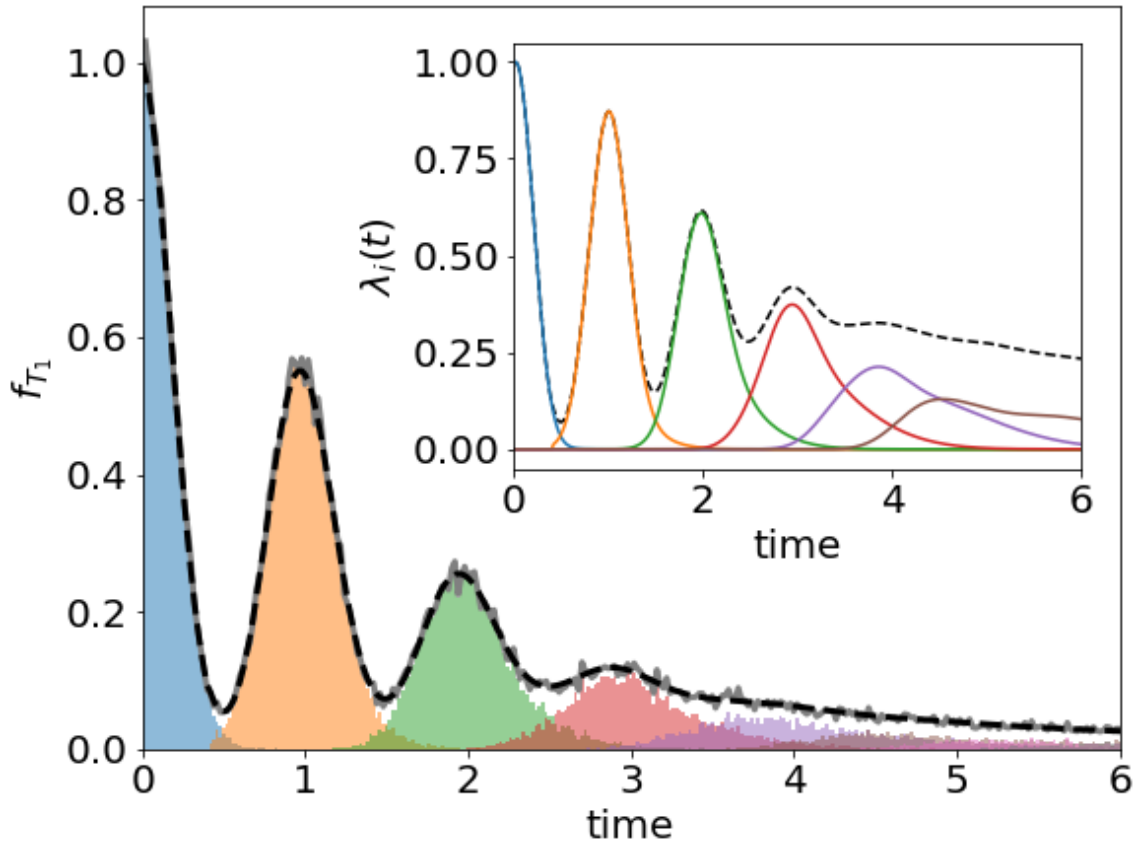
gdzie $|\alpha_0 = (x_0, p_0)\rangle$ jest stanem początkowym a $|\alpha_i = (x_0{+}id, p_0{+}jd)\rangle$ jest odległym o (i, j) detektorem w przestrzeni fazowej. Wysumowaliśmy tutaj po indeksie j oznaczającym przeskoki w pędzie, ponieważ interesuje nas przede wszystkim ewolucja w przestrzeni położeń. Rysunek 3.5 przedstawia funkcje $\lambda_i(t)$ dla kilku pierwszych najbliższych sąsiadów.

Rysunek ten przedstawia także całkowitą intensywność detekcji, zdefiniowaną jako $\lambda(t) = \sum_i \lambda_i(t)$. Jak poprzednio definiujemy także $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t')dt'$. Można wprowadzić teraz ponownie częściowe rozkłady prawdopodobieństwa

$$f_{T_1,i}(t) = \lambda_i(t)e^{\Lambda(t)}dt \tag{3.57}$$

Mają one następujące znaczenie: zakładając brak przeskoków w międzyczasie, oraz stan $|\alpha_0\rangle$ w chwili $t = 0$, prawdopodobieństwo kliknięcia w i-tym detektorze w interwale dt wokół t wynosi $f_{T_1,i}(t)dt$. Prawdopodobieństwo dowolnego kliku w chwili t wynosi $f_{T_1}(t) = \sum_i f_{T_1,i}(t)dt$. Jeżeli $\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$, otrzymujemy $\int_0^\infty f_{T_1}(t) = 1$, co oznacza, że po jakimś czasie z pewnością nastąpi kolejne kliknięcie, co jest oczywiście spełnione w przypadku nieskończonego szeregu detektorów.

Na rysunku 3.5 przedstawione są funkcje opisane w powyższych akapitach, uzyskane z symulacji wielu trajektorii. Kolorowe histogramy w dużym wykresie oznaczają unormowane gęstości czasów między detekcjami $f_{T_1,i}(t)$ (por. (3.57)), przy czym różne kolory oznaczają kolejne detektory $i = 0, 1, 2 \ldots$. Jak widać, ich suma to $f_{T_1}(t)$. Dla czasów $0 < t < d/2v$ kliknięcia następują niemal z pewnością w zerowym



Rysunek 3.5: Charakterystyczne funkcje intensywności pomiaru dla cząstki obserwowanej przez szereg detektorów. Odległość między detektorami wynosi $d = 5$, intensywność pomiaru to $\gamma = 1$ a pęd początkowy cząstki to $p = 5$. Kolorowe histogramy w dolnym lewym wykresie oznaczają funkcje $f_{T_1,i}(t)$, czyli czasowe gęstości prawdopodobieństwa wystąpienia kliknięcia w i-tym detektorze licząc od punktu wyjścia. Szara krzywa to suma tych funkcji, a czarna kreskowana krzywa to ta sama wielkość obliczona na podstawie numerycznych wartości funkcji $\lambda_i(t)$ (patrz mniejszy wykres). Dane dla tego wykresu uzyskane zostały z symulacji 100 000 trajektorii, po czym kliknięcia pogrupowano w interwały $\delta t = 0.02$. Ponieważ γ nie jest zbyt duża, maksima pierwszych kilku histogramów mniej więcej pokrywają się z czasem, po którym cząstka klasycznie dotarłaby do poszczególnych detektorów. Mniejszy wykres w górnym prawym rogu przedstawia funkcje $\lambda_i(t)$ uzyskane numerycznie zgodnie z równaniem (3.56). Czarna kreskowana linia to ich suma $\lambda(t)$. W obu wykresach pierwsze kilka kolorowych krzywych ma małe przekrycie, co powoduje widoczne "schodki" na rysunku 3.6. Oznacza to, że w określonych interwałach czasowych kliknięcia występują niemal wyłącznie w i-tym detektorze licząc od punktu wyjścia. Przedruk za zgodą rys. 6 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

detektorze, który złapał cząstkę ostatnio. Jeśli kliknięcie nastąpi w czasie $d/2v < t < 3d/2v$, będzie to niemal z pewnością złapanie przez najbliższego sąsiada, itd. Dla porównania, ramka w górnym prawu rogu przedstawia intensywności $\lambda_i(t)$ z (3.56).

Przybliżenie rzadkich kliknięć

Przedstawimy teraz kilka przybliżeń które pozwolą lepiej zrozumieć wyniki z ilustracji 3.5. Załóżmy niską intensywność detekcji $\gamma \lesssim 1$ i cząstkę o niepomijalnej prędkości $v \neq 0$. Przyjmiemy, że dla krótkich czasów po detekcji ($t \sim 1$) funkcja falowa cząstki nie zmienia swojego kształtu i jedynie przemieszcza się w przestrzeni: $\psi(x,t) = \alpha(x_0 - vt)$. Wtedy amplitudy przeskoku do kolejnych detektorów wynoszą

$$\lambda_i(t) \approx \gamma \exp\left(-[vt - id]^2\right). \tag{3.58}$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy $\Lambda(t) \approx \gamma t$, otrzymamy następujące przybliżenie rozkładu czasów pierwszych kliknięć:

$$f_{T_1}(t) \approx \gamma e^{-\gamma t} \sum_{i=0} e^{-[vt-id]^2}. \tag{3.59}$$

Te przybliżenie sprawdza się dobrze dla krótkich czasów licząc od momentu lokalizacji cząstki w α, czyli pierwszych kilku maksimów na rysunku 3.5. Później psuje się, ponieważ pomija efekty rozpływania się paczki falowej i dyssypacji spowodowanej przez oddziaływanie z detektorami. Z drugiej strony, z praktycznego punktu widzenia ogon funkcji $f_{T_1}(t)$ może nie być zbyt istotny jeśli stanowi on (tak jak w tym przykładzie) niewielki wkład w całkę funkcji, tzn. kiedy długie czasy między kliknięciami są raczej mało prawdopodobne. Fakt ten jest istotny dla utworzenia algorytmu rozwiązującego ściśle ewolucję statystyczną tego układu, o czym będzie mowa w późniejszym rozdziale.

Porównując równanie (3.59) z wynikami z rys. 3.5, zauważamy, że maksima numerycznie obliczonego $f_{T_1}(t)$ w dobrym przybliżeniu znajdują się w $t = i\frac{d}{v}$, czyli pokrywają z gaussowskimi maksimami $e^{-[vt-id]^2}$. Wielkość tych maksimów zależy od wartości γ i v. Dla $\gamma/v \lesssim 1$ pierwsze kilka maksimów ma porównywalną wysokość. Dla dużych γ/v średnia rozkładu przesuwa się na lewo, tak że w granicy tylko pierwsze maksimum w $t = 0$ jest istotne a wszystkie kolejne są silnie stłumione.

Przybliżenie rzadkich kliknięć pozwala również zrozumieć funkcję średniego położenia $\langle x(t) \rangle$ cząstki wędrującej między dwoma detektorami. Dla małych γ prawdopodobieństwo więcej niż jednego przeskoku w czasie, który jest potrzebny aby dostać

się od lewego do prawego detektora, jest niskie. Możemy wtedy zapisać

$$\langle x(t)\rangle = d\sum_i i\lambda_i(t)/\sum_i \lambda_i(t), \tag{3.60}$$

co dla nierozpływającej się paczki falowej daje:

$$\langle x(t)\rangle = d\,\frac{e^{2vtd}}{e^{d^2}+e^{2vtd}}. \tag{3.61}$$

Alternatywna metoda symulacji dynamiki

W tym rozdziale porównamy scenariusz rzadkich kliknięć do przypadku, w którym intensywność pomiaru γ jest wysoka. Pozostaniemy przy tym przy rzadkim rozmieszczeniu detektorów $d > 1$, ponieważ w tym obszarze parametrów dynamika jest najbogatsza. Rachunki numeryczne dla dużego γ są trudne, ponieważ wymagają małego kroku czasowego δt. Jest to motywacją do rozwinięcia alternatywnej metody numerycznej, którą przedstawiamy poniżej.

Załóżmy rzadką sieć detektorów α_i. Jak dotychczas, intensywność detekcji w detektorze i, zakładając że cząstka jest w stanie $|\alpha_0\rangle$ w chwili $t = 0$, jest równa $\lambda_i(t) = \gamma|\langle\alpha_i|e^{-iHt}|\alpha_0|\rangle|^2$. Dla następujących rachunków będzie kluczowe, że t znów oznacza tu nie czas absolutny, ale *od ostatniego przeskoku*. Zwróćmy także uwagę, że i może być ujemne. Niech $n_i(t,t')$ oznacza ułamek wszystkich trajektorii w chwili t, dla których ostatnie kliknięcie miało miejsce w detektorze i i upłynął od tego momentu czas t'. Funkcja ta jest więc zdefiniowana dla $t \geqslant t'$. W chwili początkowej mamy $n_i(0,0) = \delta_{i0}$, ponieważ wszystkie trajektorie rozpoczynają w tym samym stanie. Po jednym kroku czasowym w wyniku przeskoków mamy

$$n_i(\delta t,0) = \delta t\left(\sum_j \lambda_j(0)n_{i-j}(0,0) - n_i(0,0)\sum_j \lambda_j(0)\right) \tag{3.62}$$

$$n_i(\delta t,\delta t) = n_i(0,0)\left(1-\delta t\sum_j \lambda_j(0)\right) \tag{3.63}$$

Pierwsza suma pierwszego równania oznacza przeskoki "przychodzące" do i, natomiast druga suma przeskoki "wychodzące". Część trajektorii nie doświadcza przeskoku – jest to opisane przez drugie równanie. W kolejnym kroku czasowym $2\delta t$ do i znów mogą nastąpić przeskoki przychodzące. Mogą to być trajektorie, które w ostatnim kroku czasowym doznały przeskoku ($t' = 0$) – dla nich prawdopodobieństwo przeskoku w tym punkcie czasowym wynosi $\lambda_j(0)\delta t$, lub trajektorie które nie miały dotychczas przeskoku ($t' = \delta t$) – w tym przypadku prawdopodobieństwo wynosi $\lambda_j(\delta t)\delta t$. Podobnie przeskoki wychodzące następują z prawdopodobieństwem

$\lambda_j(0)\delta t$ dla tych trajektorii, które dopiero co dotarły do danego detektora, i z prawdopodobieństwem $\lambda_j(\delta t)\delta t$ dla tych, które były tam już krok wcześniej.

Tak więc

$$n_i(2\delta t, 0) = \delta t\Bigg(\sum_j \lambda_j(0) n_{i-j}(\delta t, 0) + \lambda_j(\delta t) n_{i-j}(\delta t, \delta t) - n_i(\delta t, 0)\sum_j \lambda_j(0) - n_i(\delta t, \delta t)\sum_j \lambda_j(\delta t)\Bigg) \tag{3.64}$$

$$n_i(2\delta t, \delta t) = n_i(\delta t, 0)\left(1 - \delta t \sum_j \lambda_j(0)\right) \tag{3.65}$$

$$n_i(2\delta t, 2\delta t) = n_i(\delta t, \delta t)\left(1 - \delta t \sum_j \lambda_j(\delta t)\right) \tag{3.66}$$

Widzimy już jak uogólnić te rozumowanie: w każdym kroku czasowym należy uwzględnić wszystkie chwile w przeszłości, w których miały miejsce przeskoki do i, i pomnożyć je przez funkcje λ_j w odpowiednim czasie. Tak więc

$$n_i((m+1)\delta t, 0) = \delta t\left[\sum_{m'=0}^{m}\sum_j \lambda_j(m'\delta t) n_{i-j}(m\delta t, m'\delta t) - n_i(m\delta t, m'\delta t)\lambda_j(m'\delta t)\right] \tag{3.67}$$

$$n_i((m+1)\delta t, (m'+1)\delta t) = n_i(m\delta t, m'\delta t)\left(1 - \delta t \sum_j \lambda_j(m'\delta t)\right) \tag{3.68}$$

Dla celów numerycznych wszystkie n_i można traktować jako współrzędne wektora

$$\mathbf{n}(t) = [n_{i_{min}}(t, 0), \ldots, n_{i_{min}}(t, t_{max}), \ldots, n_{i_{max}}(t, 0), \ldots, n_{i_{max}}(t, t_{max})]. \tag{3.69}$$

Składa się on z $i_{max} - i_{min}$ bloków odpowiadających liczbie detektorów, które chcemy uwzględnić w rachunku. Każdy blok składa się z $t_{max}/\delta t$ liczb. Są to wartości $n_i(t, t')$ dla wszystkich możliwych t', przy zadanym t. Parametr t_{max} jest nie większy niż całkowity czas symulacji. W praktyce może on być jednak znacznie mniejszy, bez istotnej utraty dokładności: jako górna granica może posłużyć czas, po którym z (dużym) prawdopodobieństwem p nastąpi przeskok. Ten czas jest zadany przez wzór $\Lambda(t_{max}) = -\ln(p)$ (por. (3.33)). Sformułowany w ten sposób algorytm da się zapisać jako mnożenie macierzy przez wektor

$$\mathbf{n}(t + dt) = A(dt)\mathbf{n}(t) \tag{3.70}$$

$A(dt)$ jest rzadką, niezależną od czasu macierzą stochastyczną. Jej niezerowe elementy zadane są przez równania (3.67) i (3.68).

Powyższy algorytm pozwala z dowolną dokładnością rozwiązać problem ewolucji gęstości zespołu trajektorii. Obliczenie macierzy A nie stanowi trudności – sprowadza się ono do stabelaryzowania funkcji $\lambda_j(t)$. Kluczowym wymogiem stanowiącym o skuteczności metody jest założenie jednorodności siatki detektorów: po nastąpieniu dowolnego przeskoku intensywności kolejnego przeskoku do j-tego sąsiada znów muszą być zadane przez $\lambda_j(t)$. Uwzględnienie zmian pędu wymusza obliczenie funkcji $\lambda_{j,k}(t)$ dla różnych pędów k względem siatki detektorów, co gwałtownie zwiększa złożoność obliczeniową. Dlatego w tej pracy wykorzystujemy ten algorytm jedynie do obliczenia ewolucji ograniczonej do jednego stanu pędowego, co jest uzasadnione gdy $d \ll 1$. Jako metoda uzyskania wartości oczekiwanych takich jak $\langle x(t) \rangle$ jest on wtedy istotnie szybszy od np. wykorzystywanej dotychczas w tej pracy metody MCWF, zwłaszcza gdy mamy do czynienia z rzadką siatką detektorów. Uzyskuje się je za pomocą wzoru

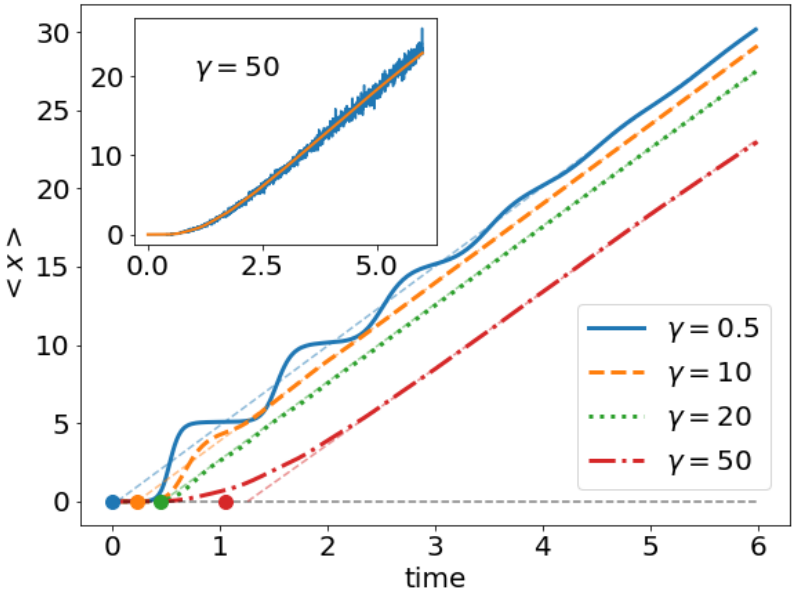
$$\langle Q(t) \rangle = \frac{\sum_i n_i(t,0) q_i}{\sum_i n_i(t,0)} \tag{3.71}$$

gdzie przez Q oznaczamy dowolną obserwable (np. położenie albo pęd) a przez q_i wartość tej obserwabli powiązanej z detektorem i.

Średnie położenie w przypadku dowolnej intensywności pomiaru

Przedstawimy teraz wyniki uzyskane za pomocą powyższej metody, badając przypadek cząstki z niezerowym pędem, monitorowanej przez rzadki szereg detektorów ($d \ll 1$). Skomentujmy najpierw wykresy widoczne w górnym lewym okienku rys. 3.6. Porównują one średnie położenie cząstki w czasie uzyskane za pomocą techniki z poprzedniego rozdziału do uśrednienia po wielu trajektoriach uzyskanych metodą MCWF dla $\gamma = 50$. Jak widać, obie metody wykazują bardzo dobrą zgodność.

Przejdźmy teraz do głównego panelu rys. 3.6. Przedstawia on średnią wartość położenia zgodnie z równaniem (3.71) dla szeregu wartości γ, od małych do bardzo dużych wielkości. Widzimy, że dla małych intensywności pomiaru czasowa ewolucja $\langle x(t) \rangle$ naznaczona jest przez "schodki", podobne do tego z wykresu 3.4. Jak wspominaliśmy, funkcję tę można wtedy przybliżyć przez (3.60). Dla rosnącego γ schodki rozmywają się, przechodząc dla dużych czasów w prostą linię. Można to zrozumieć w następujący sposób: im częstsze kliknięcia, tym szybciej poszczególne trajektorie rozbiegają się w czasie (kwestia ta będzie bardziej szczegółowo omówiona w kolejnym rozdziale). Prowadzi to do statystycznej "desynchronizacji" trajektorii, ponieważ w każdej chwili czasowej (w skali ensemble'u) aktywne są różne detektory. Ten sam



Rysunek 3.6: Średnie położenie cząstki $\langle x(t) \rangle$ z prędkością początkową $v = 5$ jako funkcja czasu w przypadku monitorowania przez rzadką sieć detektorów ($d = 5$). Grube kolorowe krzywe przedstawiają $\langle x(t) \rangle$ dla $\gamma = 0.5, 10, 20, 50$, obliczone za pomocą metody statystycznej. Dla każdego przypadku narysowane są również cienkimi liniami asymptotyczne proste. Kolorowe kropki na osi czasu oznaczają opóźnienia obliczone za pomoca wzoru (3.43). W okienku po górnej lewej stronie widać tę samą krzywą dla $\gamma = 50$ (pomarańczowy kolor) w porównaniu do średniej po wielu trajektoriach uzyskanych metodą MCWF (niebieska krzywa). Przedruk za zgodą rys. 8 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

efekt odpowiada za przejście od schodków do prostej linii (w późniejszym czasie) w przypadku małego γ.

Warto zauważyć, że niezależnie od wyboru γ, w granicy dużego czasu funkcja $\langle x(t)\rangle$ zawsze ma to samo nachylenie, odpowiadające prędkości początkowej cząstki. Asymptotyczna prosta przecina jednak oś czasu w $t_0 > 0$. Dla odległego obserwatora wygląda to, jakby cząstka wystartowała z opóźnieniem względem trajektorii klasycznej (lub takiej, dla której $\gamma = 0$). Opóźnienie to jest większe, im większa jest intensywność pomiaru. Zjawisko to budzi skojarzenie z efektem Zenona. Opóźnienia t_0 w dobrym przybliżeniu można opisać wzorem (3.43), który został wyprowadzony dla pojedynczego detektora. W wykresie 3.6 czasy t_0 oznaczone są przez kolorowe kropki, które należy porównać z miejscami zerowymi prostych asymptotycznych. Wyznaczają one czas ucieczki od detektora w zerze.

Na koniec krótko skomentujemy przypadek gęstej siatki detektorów. W tym scenariuszu cząstka w każdej chwili ma istotne prawdopodobieństwo detekcji przez wiele różnych detektorów. Z tego powodu zanika zarówno skokowa ewolucja z 3.6, jak i efekt Zenona opisany tu oraz w poprzednich rozdziałach. Pierwszą bardzo ważną obserwacją staje się, że wartości takie jak $\langle x(t)\rangle$ ewoluują zgodnie z klasycznymi trajektoriami. Istotna staje się dyspersja, tzn. rozbieżność zespołu trajektorii od średniej. Zależność tę zbadamy w następującym rozdziale.

Dyspersja

Poprzednio skupialiśmy się na analizie wartości średnich, takich jak $\langle x(t)\rangle$ lub $\langle p(t)\rangle$. Jednak to, w jakim stopniu losowo realizowana trajektoria będzie przypominała średnią, określa inny parametr. Dla wielkości A nazywamy go dyspersją σ_A zdefiniowaną przez

$$\sigma_A(t) = \sqrt{\langle A^2(t)\rangle - \langle A(t)\rangle^2}. \tag{3.72}$$

Spróbujemy oszacować dyspersje położenia $\sigma_x(t)$ i pędu $\sigma_p(t)$ na podstawie klasycznego rachunku. Przyjmijmy, że cząstka u początku ma położenie x_0 i pęd p_0. Zakładamy, że są to zmienne losowe. Niech ruch cząstki będzie opisany przez równania Newtona z szumem

$$\dot{p} = \sqrt{D_p}\xi(t) \tag{3.73}$$

$$\dot{x} = p + \sqrt{D_x}\xi(t) \tag{3.74}$$

D_p i D_x są tutaj stałymi oznaczającymi intensywność losowych zaburzeń cząstki. Funkcja $\xi(t)$ oznacza biały szum:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \tag{3.75}$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t') \tag{3.76}$$

Rozwiązanie równań (3.73) to

$$p(t) = p_0 + \sqrt{D_p} W(t) \tag{3.77}$$

$$x(t) = x_0 + p_0 t + \sqrt{D_x} W(t) + \sqrt{D_p} Z(t) \tag{3.78}$$

wprowadziliśmy tutaj proces Wienera $W(t) := \int_0^t \xi(t')dt'$ oraz całkowany proces Wienera $Z(t) := \int_0^t W(t')dt'$. Biorąc wartości oczekiwane powyższych równań otrzymujemy oczywiście ruch klasyczny:

$$\langle p(t) \rangle = \langle p_0 \rangle \tag{3.79}$$

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle + \langle p_0 \rangle t \tag{3.80}$$

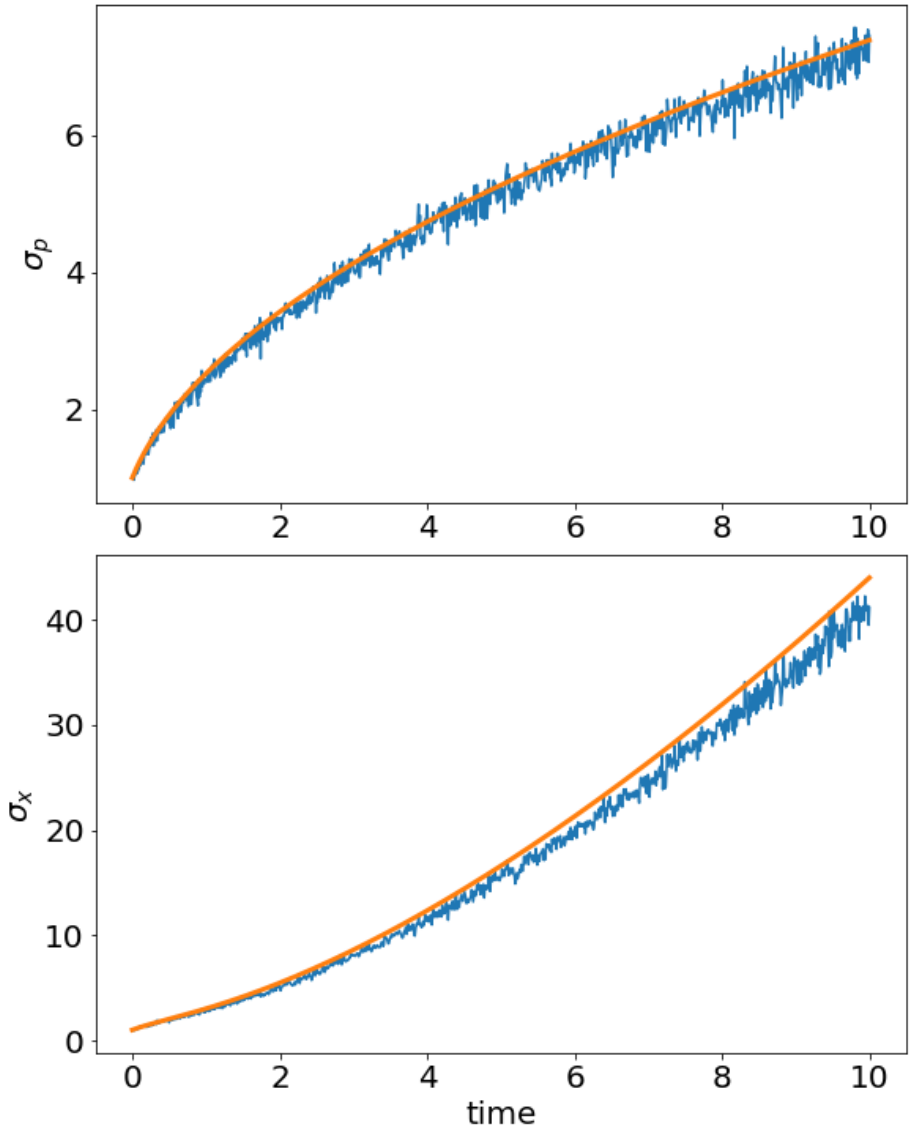
Interesuje nas wariancja zmiennych $x(t)$ i $p(t)$. Podnosimy (3.77) do kwadratu i wykorzystując (3.72) oraz (3.79) otrzymujemy

$$\sigma_p^2(t) = \sigma_{p_0}^2 + D_p t \tag{3.81}$$

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_{x_0}^2 + \left(D_x + 2\langle x_0 p_0 \rangle - 2\langle x_0 \rangle \langle p_0 \rangle\right) t + \sigma_{p_0}^2 t^2 + \frac{1}{3} D_p t^3 \tag{3.82}$$

Wprowadziliśmy tu $\sigma_{p_0}^2 = \langle p_0^2 \rangle - \langle p_0 \rangle^2$ oraz $\sigma_{x_0}^2$ analogicznie. Wykorzystaliśmy także, że wariancja procesu Wienera $W(t)$ jest równa t a jego całki $1/3t^3$. Rysunek 3.7 przedstawia porównanie równań (3.81) i (3.82) z wynikami symulacji uzyskanymi metodą MCWF. Rachunki dotyczyły cząstki z początkową prędkością, monitorowanej przez gęstą sieć detektorów. Jako parametry modelu klasycznego zostały podstawione wartości wynikające z obliczeń analitycznych przedstawionych w późniejszym rozdziale; σ_{p_0} i σ_{x_0} zgodnie z (3.88) i D_x oraz D_p zgodnie z (3.91). Jak widać, model analityczny jest w bardzo dobrej zgodności z symulacją. Oznacza to, że w przestrzeni pędów cząstka wykonuje ruchy Browna. Natomiast w przypadku położenia cząstki mamy do czynienia z superdyfuzją, ponieważ fluktuacje pędów powiększają ich rozrzut, co dla dużych czasów jest dominującym wkładem.

Powyższy rachunek wskazuje, że dynamika kwantowa generowana w naszym modelu opisana przez równanie GKSL (3.17) może być sprowadzona do znacznie prostszego modelu klasycznego (3.77) i (3.78). Oczywiście jest to możliwe tylko w pewnym



Rysunek 3.7: Rozrzut pomiarów pędów (górny wykres) i położeń (dolny wykres) dla cząstki monitorowanej przez gęstą sieć detektorów. Rysunek zawiera porównanie przewidywań wynikających z klasycznego modelu stochastycznego (3.81) i (3.82) (pomarańczowe krzywe) z danymi uzyskanymi z 10000 trajektorii obliczonych metodą MCWF (niebieskie krzywe). Cząstką miała początkową prędkość $v_0 = 1.08$. Pozostałe parametry symulacji: intensywność monitorowania $\gamma = 1$, odległość między sąsiadującymi detektorami $d = 1.08$.

przedziale parametrów, w którym model generuje klasyczne trajektorie (w przeciwieństwie do rys. 3.6). Warto również zauważyć, że trajektorie generowane przez powyższe równania Newtona z szumem różnią się od trajektorii naszego modelu kwantowego, ponieważ są ciągłe i nie zawierają przeskoków. Odtwarzają one jednak wszystkie cechy statystyczne modelu.

Porównanie z alternatywnym modelem pomiaru

Podsumowując dotychczasowe wyniki, widzimy, że monitorowanie przez detektory w naszym modelu ma wpływ zarówno na średnie położenie cząstki, jak i jej dyspersję. Nasuwa się pytanie, czy zależności te różnią się w innych modelach pomiaru. Dokonamy tutaj porównania z popularnym modelem, badanym m.in. w [AU17]. Jest to pomiar położenia opisany przez operator pomiaru

$$K(X) = \sqrt{\gamma} \int f(X - x')|x'\rangle\langle x'|dx', \tag{3.83}$$

gdzie f jest dogodną, zlokalizowaną przestrzennie funkcją, np. rozkładem gaussowskim. Działanie tego operatora sprowadza się do filtrowania funkcji falowej, tzn. pomnożenia jej przez obwiednię scentrowaną wokół wyniku pomiaru X. Ten rodzaj pomiaru z łatwością daje się zaimplementować używając metodę MCWF – wystarczy zastąpić dotychczasowe operatory C_{ij}, które były proporcjonalne do operatorów rzutujących, przez $K(X)$. Aby osiągnąć jak najściślejsze porównanie obu metod, zakładamy dyskretny zbiór operatorów $K(X_i)$, z identyczną co dotychczas odległością między położeniami detektorów: $X_{i+1} - X_i = d$. Podobnie zakładamy, że f jest funkcją gaussowską:

$$f(x_i - x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x_i - x)^2}{4\sigma^2}}, \tag{3.84}$$

gdzie $\sigma = 1/\sqrt{2}$, tak jak w rozważanych dotychczas funkcjach detektorów $\alpha_{ij}(x)$. Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do C_{ij}, $K(X_i)$ bezpośrednio mierzy jedynie położenie.

Warto również zauważyć, że natychmiastowe wielokrotne działanie operatora $K(X)$ nie jest tożsame z pojedynczym pomiarem, jak w przypadku pomiarów rzutowych. Prowadzi ono do stopniowego zawężania się paczki falowej wokół położenia X, a w granicy nieskończenie wielu następujących po sobie pomiarów do rozkładu $\delta(x - X)$. W przeciwieństwie do tego, model pomiaru na którym skupia się ta praca ma podobieństwo do pomiaru rzutowego: Bezpośrednio po detekcji cząstki znajduje się w stanie własnym operatora pomiaru C_α, tak że gdyby natychmiast nastąpił kolejny pomiar z wynikiem α, stan cząstki pozostałby niezmieniony. Jeżeli funkcje $|\alpha\rangle$ byłyby ortogonalne (co jest w przybliżeniu prawdziwe dla rzadko rozmieszczonych detekto-

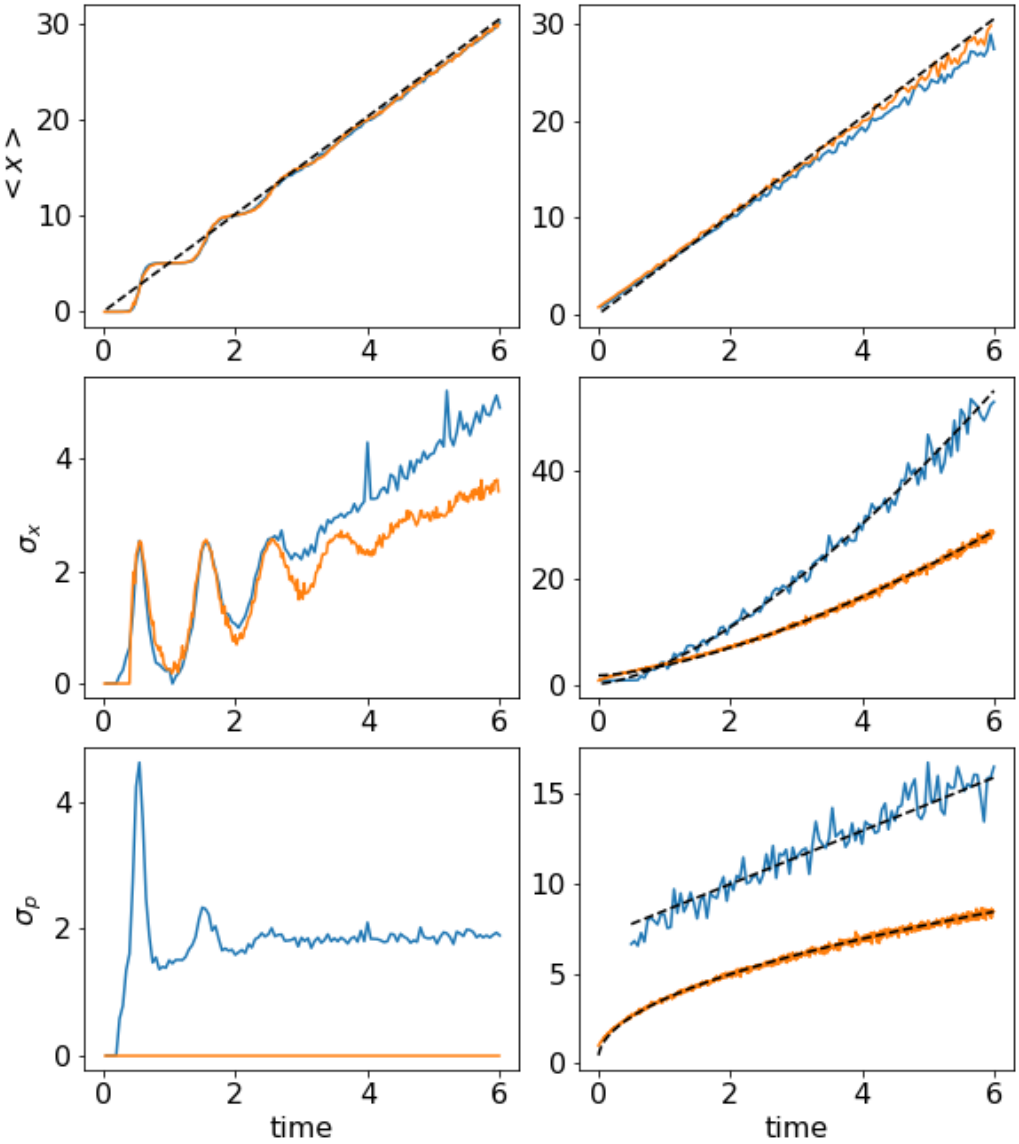
rów) byłby to jedyny możliwy wynik pomiaru następującego w krótkim czasie po poprzedniej detekcji.

Wykres 3.8 przedstawia wynik rachunków numerycznych porównujących oba modele. Jako warunek początkowy w obu przypadkach wybraliśmy cząstkę w stanie gaussowskim $|\alpha_{ij}\rangle$ zlokalizowanym w $x_i = 0$ i z niezerowym pędem p_j. Jak omówiono w poprzednich rozdziałach, dynamika w kluczowy sposób zależy od stosunku odległości między detektorami do szerokości paczki falowej σ. Dlatego rachunki przeprowadzono dla obu modeli w reżimie "rzadkich" i "gęstych" detektorów.

W przypadku omawianego w tej pracy modelu "rzutowego", każdy pomiar daje wynik (x_i, p_i, t_i), czyli trzy liczby rzeczywiste: odpowiednio położenie i pęd cząstki oraz czas, w którym nastąpiła detekcja. Zbiory tych punktów pomiarowych stanowią "trajektorie cząstki" (x_i, t_i) i (p_i, t_i) w przestrzeni położeń i pędów. Rezultatem pomiaru (3.83) jest jedynie położenie i czas pomiaru. W celu porównania obu modeli każdą trajektorię (x_i, t_i) w modelu filtracyjnym uzupełniamy przez trajektorię (p_i, t_i), przy czym prędkości obliczamy na podstawie trajektorii w położeniach: $p_i = (x_i - x_{i-1})/(t_i - t_{i-1})$. Jako x_0 i p_0 przyjmujemy początkowe położenie i pęd cząstki. Jak poprzednio, punkty pomiarowe przyporządkowane zostają okienkom czasowym Δt_i, co pozwala obliczyć średnie wartości oraz dyspersje interesujących nas zmiennych.

Na rysunku 3.8 pomarańczowe krzywe oznaczają wyniki modelu rzutowego (operatory C_{ij}), natomiast niebieskie oznaczają pomiar filtrujący (operatory $K(X_i)$). Górne dwa wykresy pokazują średnie położenie cząstki $\langle x(t)\rangle$. Dla przypadku rzadkich detektorów rozpoznajemy charakterystyczne schodki, które następnie przechodzą w prostą linię. W przypadku gęstych detektorów, średnie położenie od początku opisane jest przez liniową zależność. Widać, że modele nie wykazują tu istotnych różnic i w obu przypadkach prowadzą do krzywych z nachyleniem v, odpowiadającym prędkości początkowej, czyli klasycznej trajektorii. Z tego powodu nie przedstawiamy wykresów średnich prędkości – w obu przypadkach są one stałe, co daje poziome linie na wykresie czasowym.

Obraz zmienia się gdy przyjrzymy się dyspersjom. Środkowy rząd przedstawia rozrzut położeń $\sigma_x(t)$ (por. (3.72)). W przypadku rzadkiej siatki detektorów obserwujemy z początku oscylujące funkcję. Krzywe w tym obszarze dla obu modeli pokrywają się. Oscylacje bezpośrednio odpowiadają "schodkom" zaobserwowanym dla średniego położenia $\langle x(t)\rangle$. Minima znajdują się w czasach, dla których średnie położenie cząstki jest bliskie jednego z detektorów, natomiast maksima odpowiadają sytuacji, w której cząstka znajduje się dokładnie pomiędzy dwoma detektorami. Ten rodzaj



Rysunek 3.8: Porównanie przeskokowego (pomarańczowe krzywe) i filtracyjnego (niebieskie krzywe) modelu pomiaru. We wszystkich przypadkach intensywność detekcji wynosiła $\gamma = 1$, a prędkość początkowa cząstki $v_0 = 5$. Rachunki wykonane zostały dla rzadkiej (lewa kolumna, $d = 5.1$) i gęstej (prawa kolumna, $d = 0.73$) siatki detektorów. Górne dwa rysunki przedstawiają ewolucję średniego położenia cząstki $\langle x(t) \rangle$. Czarne przerywane krzywe oznaczają dla porównania klasyczną trajektorię $\langle x \rangle = vt$. Środkowy rząd zawiera dyspersję położenia cząstki $\sigma_x(t)$ liczoną dla zespołu trajektorii. W prawym wykresie dopasowane zostały przedstawione jako czarne przerywane linie krzywe $\sigma_x(t) \sim t^2$ (dopasowanie do niebieskiej funkcji) i $\sigma_x(t) \sim t^{3/2}$ (dopasowanie do pomarańczowej funkcji). Na dolnych wykresach pokazano dyspersję w przestrzeni pędów $\sigma_p(t)$. Ponownie narysowane są także (jako przerywane linie) dopasowane funkcje $\sigma_p(t) \sim t + \text{const}$ (przy niebieskiej funkcji) i $\sigma_p(t) \sim t^{1/2}$ (dopasowanie do pomarańczowej funkcji). Przedruk za zgodą rys. 9 z F. Gampel, M. Gajda; Phys. Rev. A 107, 012420, 2023. Copyright (2023) American Physical Society.

szumu wynika więc z dyskretnego rozkładu możliwych wyników pomiarów i znany jest w fizyce doświadczalnej jako "shot noise". Dla dalszych czasów oscylacje zanikają, a $\sigma_x(t)$ narasta liniowo, przy czym przyrost jest większy w modelu filtracyjnym. W przypadku gęstej siatki detektorów (wykres po prawej) obserwujemy różnicę skalowania między modelami. Dla modelu rzutowego otrzymujemy dla dużych czasów znajomy wynik $\sigma_x(t) \sim t^{3/2}$, natomiast dla modelu filtracyjnego $\sigma_x(t) \sim t^2$. Czarne przerywane linie to fity funkcji wymiernych z odpowiednimi współczynnikami. Ponownie dyspersja w modelu filtracyjnym narasta szybciej niż w modelu rzutowym.

Dolny rząd wykresów przedstawia dyspersję w przestrzeni pędów $\sigma_p(t)$. Ponownie obserwujemy istotne różnice w zależności od gęstości siatki detektorów oraz modelu pomiarowego. Dla rzadkich detektorów dyspersja modelu rzutowego pozostaje równa zeru przez cały czas symulacji. Dzieje się tak ponieważ w badanym tu scenariuszu, sieć detektorów jest na tyle rzadka, że przeskok do sąsiedniego stanu pędowego jest skrajnie nieprawdopodobny. W modelu filtracyjnym obserwujemy z początku oscylacje, które po kilku okresach zostają stłumione, a dla dalszych czasów $\sigma_p(t)$ przyjmuje stałą, niezerową wartość. Wreszcie w przypadku gęstej siatki detektorów model filtracyjny wykazuje skalowanie liniowe, podczas gdy dla modelu rzutowego $\sigma_p(t) \sim \sqrt{t}$, jak pokazano już wcześniej. Ponownie poza wynikami numerycznymi przedstawiamy odpowiednio dopasowane krzywe.

3.3 Cząstka w potencjale harmonicznym

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące cząstki w zewnętrznym potencjale harmonicznym, tzn. $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. W dalszym ciągu korzystamy z bezwymiarowych jednostek zdefiniowanych w rozdziale 3.1. W oscylatorze do wymienionych w 3.1 dwóch naturalnych skal długości dochodzi trzecia, długość oscylatorowa $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$. W niniejszej pracy jesteśmy zainteresowani przypadkiem, gdy a_{ho} jest równe zdefiniowanej wcześniej jednostce długości a_0. Oznacza to, że $\omega = 1$, a hermitowska część hamiltonianiu (por. (3.1) i (3.24)) ma postać

$$H_S = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}P^2. \tag{3.85}$$

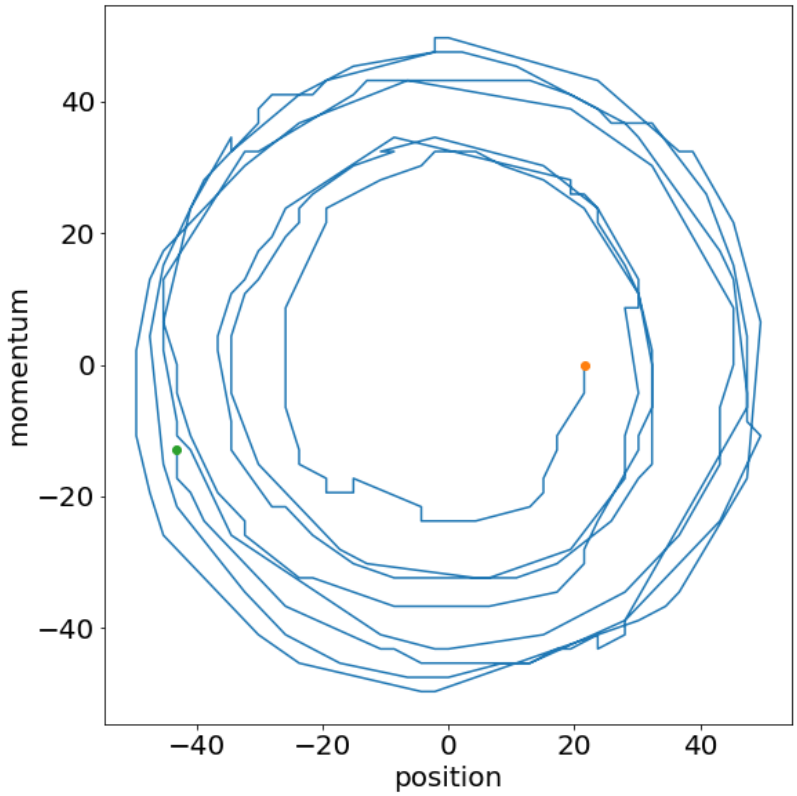
Warto zauważyć, że w przeciwieństwie do przypadku cząstki swobodnej, osiągnęliśmy w ten sposób całkowitą równoważność położenia i pędu. Dzieje się tak ponieważ przyjmując dodatkowo (jak poprzednio) jednakowe odległości detektorów w obu przestrzeniach, równania dynamiczne (np. (3.10)) są symetryczne w tych obserwablach. Jak dotychczas, dla uzyskania pojedynczych trajektorii, korzystamy z procedury MCWF.

W naszych rachunkach stan początkowy cząstki odpowiada różnemu od zera wychyleniu i zerowemu pędowi. Początkowe wychylenie jest wielokrotnością odległości między detektorami $x_0 = nd$. Z zasady $n \gg 1$, tak aby ruch cząstki mógł być monitorowany z odpowiednią rozdzielczością. Rysunek 3.9 przedstawia przykładową trajektorię cząstki w przestrzeni fazowej. Ruch przebiega po (w przybliżeniu) kolistej trajektorii, podobnie jak w przypadku klasycznym. Widać jednak nieregularne odstępstwa spowodowane losowymi aktami detekcji. Ponadto wydaje się, że promień trajektorii wzrasta z czasem, co oznacza przyrost całkowitej energii układu.

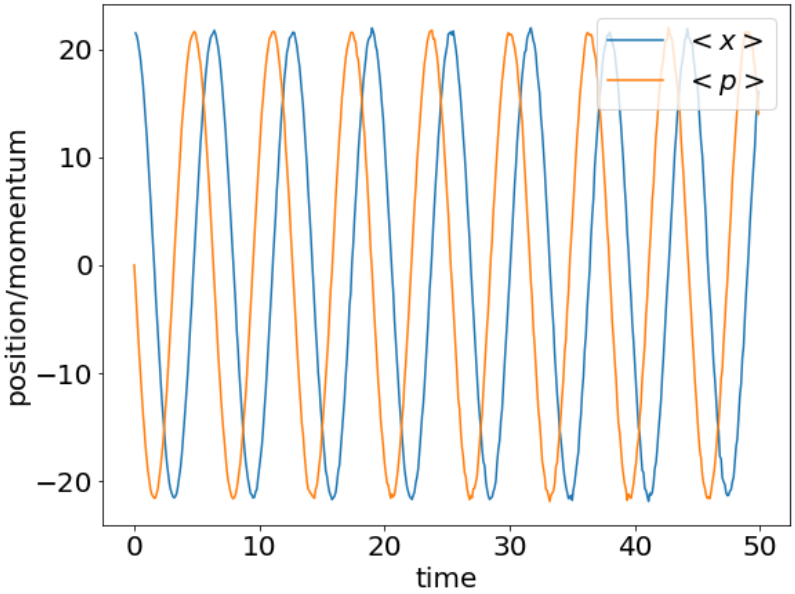
Przejdziemy teraz do statystycznych cech trajektorii. Jako pierwszą przedstawimy średnią wartość zmiennych $\langle x(t)\rangle$ i $\langle p(t)\rangle$. Na rysunku 3.10 widoczne są wykresy uzyskane z symulacji 5000 trajektorii metodą MCWF. Widać, że średnio cząstka podąża po klasycznej trajektorii. Pęd i położenie oscylują z częstotliwością oscylatora z różnicą fazową $\pi/2$.

Dyspersja – heurystyka

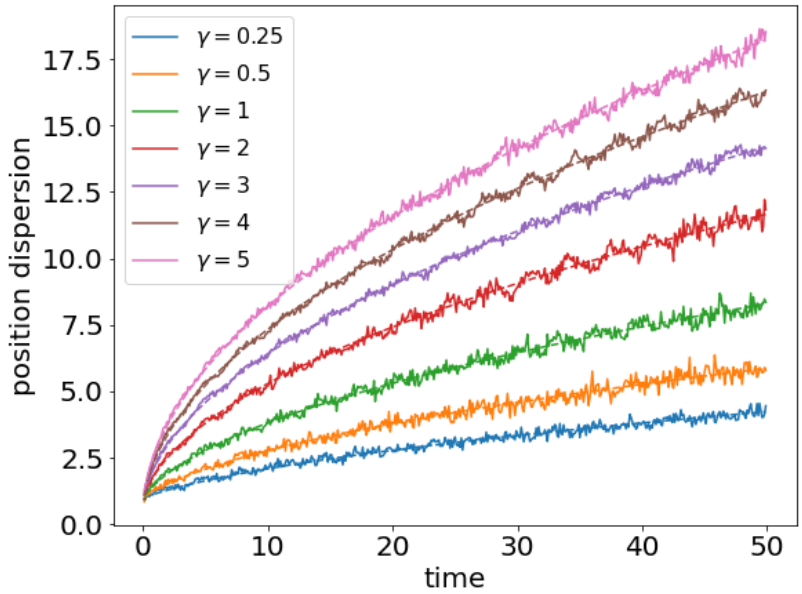
Przyjrzymy się teraz rozrzutowi trajektorii, tzn. drugim momentom rozkładów pomiarów położenia i pędu, które jak uprzednio definiujemy przez $\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2$ i $\sigma_p^2(t) = \langle p^2(t)\rangle - \langle p(t)\rangle^2$ (por. (3.72)). Z powodu opisanej wyżej symetrii spodziewamy się, że $\sigma_x^2(t) = \sigma_p^2(t)$. Rachunki zasadniczo potwierdzają te oczekiwanie, dlatego w wykresie 3.11 przedstawiamy jedynie funkcję $\sigma(t) \equiv \sigma_x(t)$. Istnieje



Rysunek 3.9: Przykładowa trajektoria cząstki w potencjale harmonicznym w przestrzeni fazowej. Na poziomej osi wyznaczone jest położenie, a na pionowej pęd cząstki. Początek trajektorii oznaczony jest przez pomarańczowy punkt, a jej koniec przez zielony. Intensywność detekcji wynosi $\gamma = 1$, a odległość między detektorami to $d = 2.16$. Dane dostępne obserwatorowi to dyskretne wartości x i p w odpowiadających detekcjom punktach w czasie. Niebieska krzywa stanowi wizualizację trajektorii, łącząc te punkty chronologicznie. Przedstawiona tutaj ewolucja jest typowa – dla danych warunków początkowych, zazwyczaj obserwujemy kolistą trajektorię z rosnącym promieniem.



Rysunek 3.10: Średnie trajektorie dla cząstki w potencjale harmonicznym. Dane zostały uzyskane przez symulację 5000 trajektorii metodą MCWF. Przeskoki zostały pogrupowane w okienka czasowe wielkości $\delta t = 0.1$. Uśrednienie po wszystkich przeskokach w danym okienku daje następnie funkcje $\langle x(t) \rangle$ i $\langle p(t) \rangle$. Zależność czasowa jest identyczna do klasycznej trajektorii, tzn. sinusoida z odpowiednią częstotliwością i przesunięciem $\pi/2$ między położeniem i pędem. Parametry symulacji to $\gamma = 1$ i $d = 2.16$.



Rysunek 3.11: Dyspersja $\sigma_x(t)$ pomiarów położenia cząstki w oscylatorze harmonicznym jako funkcja czasu. Krzywe zostały narysowane na podstawie rachunku stochastycznego metodą MCWF. Kolory odpowiadają różnym wartościom intensywności pomiaru γ zgodnie z legendą. Wszystkie rachunki zostały wykonane dla parametru sieci $d = 2.16$. Na wykres zostały nałożone także przerywanymi liniami w odpowiednich kolorach dopasowane funkcje (3.86), które z powodu dobrego przekrycia są ledwo widoczne.

pewna niewielka rozbieżność między $\sigma_x(t)$ a $\sigma_p(t)$, którą omówimy w dalszym ciągu tego rozdziału.

Wykres 3.11 przedstawia $\sigma_x(t)$ dla szerokiego zakresu wartości parametru γ. We wszystkich przypadkach dobrym przybliżeniem jest

$$\sigma^2(t) \approx Dt + \sigma_0^2, \tag{3.86}$$

przy czym D jest zależnym od intensywności pomiaru współczynnikiem dyfuzji, który rośnie monotonicznie z γ. σ_0 jest niezależną od γ dyspersją stanu początkowego. Wielkość ta jest większa od zera, ponieważ nawet gdy stan cząstki jest tożsamy ze stanem własnym jednego z detektorów, ma on wciąż niezerowe przekrycie z innymi detektorami. W wyniku tego już w chwili zerowej może nastąpić przeskok do innego detektora. Można oszacować wielkość σ_0 wykorzystując fakt, że dla małych czasów gęstość prawdopodobieństwa przeskoku z $|\alpha_{i_0 j_0}\rangle$ do $|\alpha_{ij}\rangle$ wynosi

$$Q(\alpha_{ij}) = |\langle\alpha_{ij}|\alpha_{i_0 j_0}\rangle|^2 = \frac{e^{-d^2\left((i-i_0)^2+(j-j_0)^2\right)/2}}{\sum_{ij}|\langle\alpha_{ij}|\alpha_{i_0 j_0}\rangle|^2}. \tag{3.87}$$

Zakładając, że tuż po chwili początkowej nastąpi jakiś przeskok (w tym także z powrotem do detektora początkowego), rozrzut tych pomiarów zgodnie z definicją wynosi

$$\sigma_0^2 = \sum_{ij} Q(\alpha_{ij})(id)^2 \tag{3.88}$$

Przyjmując, że $d \ll 1$, można zastąpić sumę przez całkę, co daje przybliżenie $\sigma_0 = 1$. Co zaskakujące, przybliżenie te sprawdza się jednak nawet dla stosunkowo rzadkiej siatki detektorów, jak np. dla symulowanego tu przypadku $d \approx 2.16$.

Doskonała zgodność równania (3.86) z wynikami numerycznymi sugeruje, że ruch cząstki to harmoniczna oscylacja z nałożonymi na nią ruchami Browna. Średnia rozbieżność od klasycznej trajektorii rośnie z pierwiastkiem czasu. W przeciwieństwie do cząstki swobodnej, dotyczy to zarówno położenia, jak i pędu cząstki. Jest to wyjątkowa cecha oscylatora harmonicznego. Analiza wymiarowa wskazuje, że wszystkie zmienne dynamiczne jak np. $\sigma(t)$ powinny być funkcjami bezwymiarowego parametru γt. Weryfikujemy to przez zbadanie zależności między stałą dyfuzji D a intensywnością pomiaru γ. Zgodnie z oczekiwaniem jest to zależność liniowa (patrz górny wykres na rysunku 3.12). Jest to dość intuicyjny rezultat, ponieważ większa intensywność pomiaru oznacza częstszą detekcję, a co za tym idzie, częstsze zaburzenia trajektorii. Podobnie spodziewamy się, że zmniejszenie d, tzn. zagęszczenie siatki detektorów, również doprowadzi do szybszej dyfuzji. Dolny wykres rysunku 3.12 przedstawia uzyskaną numerycznie zależność między odległością sąsiadujących detektorów d a stałą dyfuzji D dla stałej wartości γ. Wynika z niego jednoznacznie, że D jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między detektorami. Podsumowując, rachunki numeryczne wskazują na zależność

$$D \approx 2\pi \frac{\gamma}{d^2}. \tag{3.89}$$

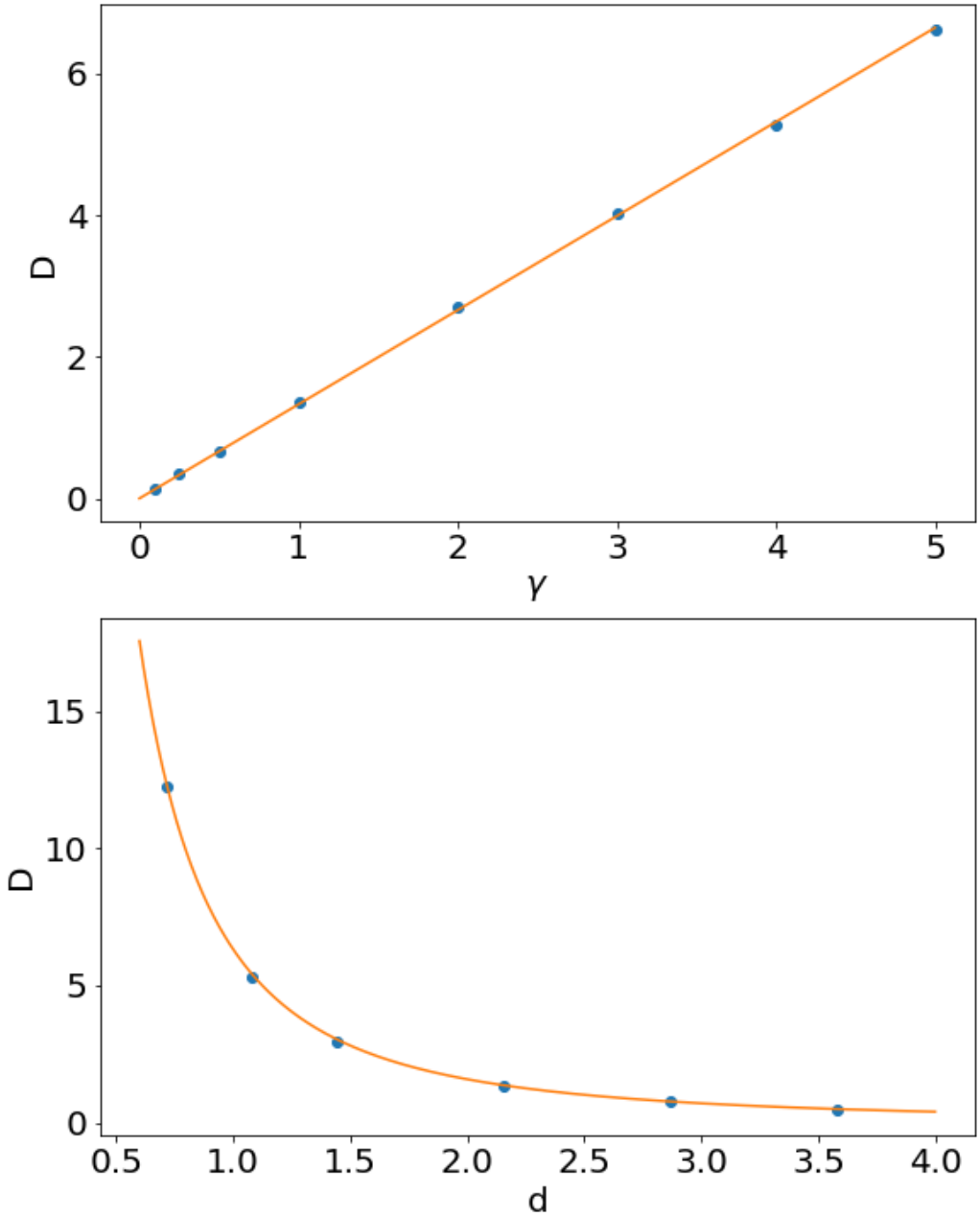
Wzór ten możemy również uzasadnić analitycznie, czyniąc pewne przybliżenia. Stała dyfuzji jest średnim kwadratem długości przeskoku na jednostkę czasu:

$$D = \gamma \sum_{j,k} e^{-d^2(j^2+k^2)/2}(dj)^2. \tag{3.90}$$

W tym miejscu korzystamy z przybliżenia ciągłego, czyli podstawiamy $jd = x$, $kd = p$ i zamieniamy sumę w całkę: $\sum_{j,k} \to \frac{1}{d^2}\int dxdp$. Uzyskujemy wtedy

$$D \approx \frac{\gamma}{d^2}\int dxdp\, x^2 e^{-(x^2+p^2)/2} = 2\pi\frac{\gamma}{d^2}, \tag{3.91}$$

co jest tożsame z równaniem (3.89).



Rysunek 3.12: Stała dyfuzji dla cząstki w oscylatorze harmonicznym jako funkcja intensywności pomiaru γ i odległości między detektorami d. Każdy niebieski punkt odpowiada symulacji zespołu trajektorii metodą MCWF. Z tego zespołu obliczamy wartość D (por. rysunek 3.11 i równanie (3.86)). Dla górnego wykresu przyjęliśmy stałą wartość $d = 2.16$, natomiast w dolnym wykresie wszystkie symulacje przeprowadzone zostały dla $\gamma = 1$. Pomarańczowe linie przedstawiają dopasowane krzywe zgodnie z zależnością $D \sim \gamma/d^2$ (por. (3.89)).

Dyspersja – model klasyczny

Warto zauważyć, że heurystycznie wyprowadzona zależność (3.86) da się uzasadnić również za pomocą klasycznego modelu newtonowskiego, tak jak uczyniliśmy to w przypadku cząstki swobodnej (por. (3.73) i (3.93)). W przypadku potencjału harmonicznego równania te mają postać

$$\dot{p} = -x + \sqrt{D}\xi_x(t) \tag{3.92}$$

$$\dot{x} = p + \sqrt{D}\xi_p(t). \tag{3.93}$$

Wykorzystując transformację $\alpha = x+ip$ możemy sprowadzić to do jednego równania zespolonego

$$\dot{\alpha} = -i\alpha + \sqrt{D}\zeta(t). \tag{3.94}$$

Gdzie wprowadziliśmy zespolony szum $\zeta(t) = \xi_x(t) + i\xi_p(t)$. Powyższe równanie jest dobrze znane z teorii stochastycznych równań różniczkowych (patrz np. [Gar85]). Jego rozwiązanie ma postać

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-it} + \int_0^t e^{-i(t-t')}\zeta(t')dt' \tag{3.95}$$

Zakładając warunki początkowe $x_0 \neq 0, p_0 = 0$ pozwala nam to obliczyć średnie wartości

$$\langle x(t)\rangle = x_0 \cos(t) \tag{3.96}$$

$$\langle p(t)\rangle = -x_0 \sin(t), \tag{3.97}$$

czyli znów trajektorie klasyczne. Podobnie uzyskujemy dyspersje

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_{x_0}^2 + Dt \tag{3.98}$$

$$\sigma_p^2(t) = \sigma_{p_0}^2 + Dt \tag{3.99}$$

w zgodności z (3.86). Otwarte pozostaje pytanie, czy poza cząstką swobodną i w potencjale harmonicznym można uzyskać ten rodzaj korespondencji między modelem kwantowym a odpowiednim modelem klasycznym także dla innych potencjałów.

Modulacja dyspersji

Bliższa analiza funkcji $\sigma(t)$ wskazuje, że na wzrost zgodny z pierwiastkiem z czasu nakłada się niewielka oscylacja o częstości 2ω (por. rysunek 3.11). Oscylacje te można zrozumieć, przyjmując że pomiędzy poszczególnymi trajektoriami następuje losowe rozfazowanie $x = x_0 \cos(t+\delta\varphi)$ względem średniego ruchu $x = x_0 \cos(t)$. Rozfazowanie te prowadzi do oscylującego wkładu do wzoru na dyspersję: $\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \approx$

$\delta\varphi^2 \sin^2 t$. Warto zauważyć, że opisany tu efekt następuje również w przestrzeni pędów. Oscylacja nakładająca się na $\sigma_p(t)$ jest przesunięta w fazie względem $\sigma_x(t)$, co łatwo uzasadnić na gruncie powyższych równań. Podobne zjawisko zostało zaobserwowane w [SM01], gdzie badano dynamikę monitorowanej w sposób ciągły cząstki w potencjale anharmonicznym.

Rozważania energetyczne

Fluktuacje trajektorii położeń i pędów prowadzą do wzrostu średniej energii cząstki. Właśnie z tego powodu pojedyncze trajektorie w przestrzeni fazowej z reguły są wybiegającymi na zewnątrz spiralami (por. rysunek 3.9). Promień takiej trajektorii jest bezpośrednio związany z energią cząstki: $r(t) = \sqrt{2\langle E(t)\rangle}$. Natomiast z równania (3.89) wynika, że średnia energia cząstki, czyli $\langle E\rangle = \frac{1}{2}\langle x^2\rangle + \frac{1}{2}\langle p^2\rangle$, wzrasta liniowo w czasie:

$$\langle E(t)\rangle = \delta^2(t) + E_0 = Dt + (\delta_0^2 + E_0). \tag{3.100}$$

Wprowadziliśmy tu energię początkową $E_0 = \frac{1}{2}(x_0^2 + p_0^2)$.

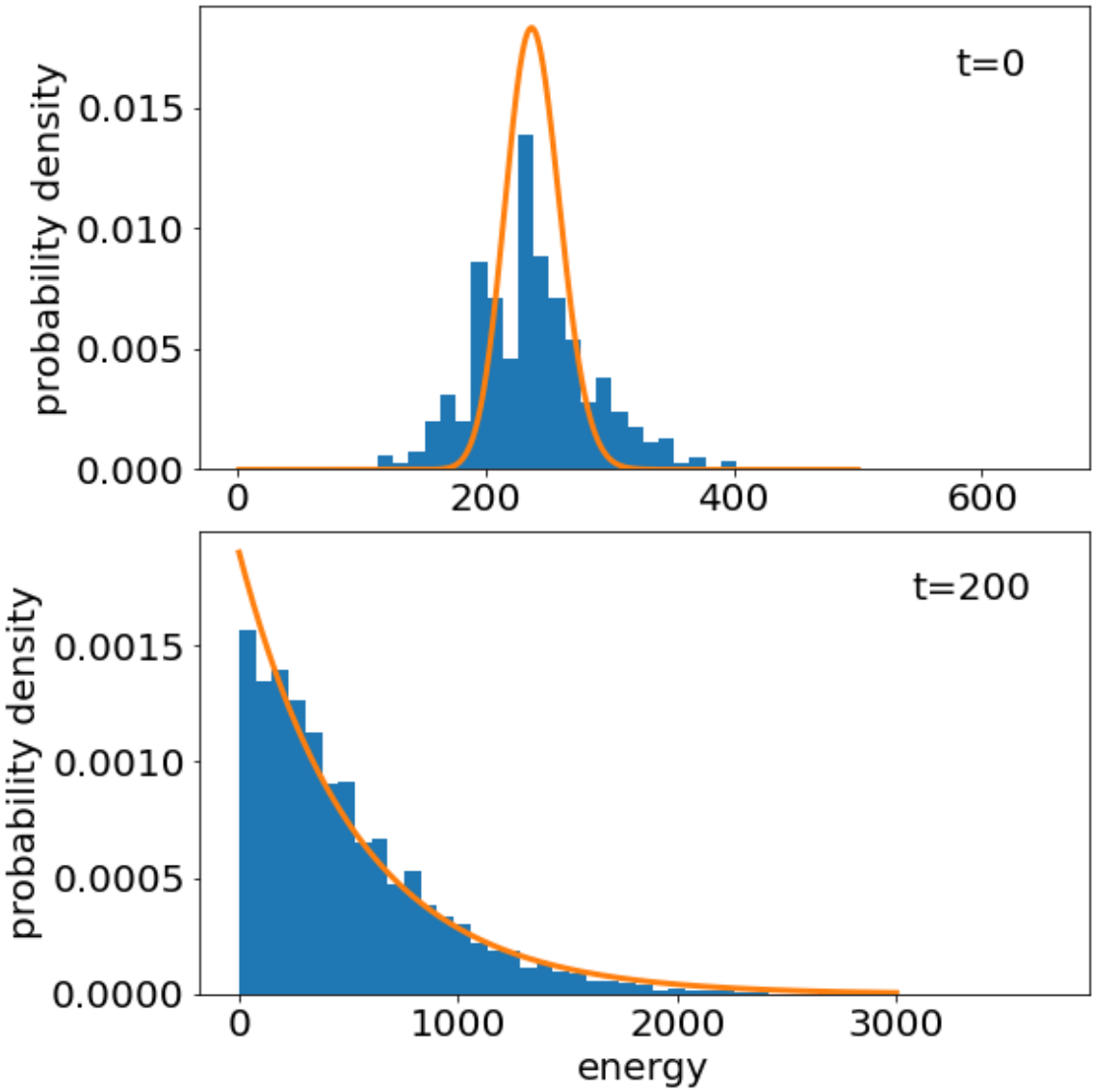
Rozważmy teraz rozkład energii cząstki. Możemy podzielić skalę energii na interwały o szerokości ΔE. Zliczając, jaki ułamek trajektorii przypada w danej chwili na każdy interwał, możemy zdefiniować zależny od czasu rozkład energii $p_t(E)$. Przyjrzymy się najpierw rozkładowi energii około chwili początkowej, $t \approx 0$. Widać go w górnym wykresie rysunku 3.13. Jest to dość wąski rozkład wokół energii początkowej E_0. Ponownie wyprowadzimy także analitycznie wyrażenie przybliżające tę funkcję. Jak poprzednio, skorzystamy z przybliżenia ciągłego, czyli $j(j_0)d \to x(x_0), k(k_0)d \to p(p_0)$, oraz $Q(\alpha_{ij}) \to \mathcal{P}(x,p) = 1/(2\pi)e^{-(x-x_i)^2/2}e^{-(p-p_j)^2/2}$. Cząstka znajdująca się w położeniu (x_0, p_0) w przestrzeni fazowej ma rozkład energii

$$p_0(E) = \int dxdp\, \mathcal{P}(x,p)\, \delta\left(E - \frac{1}{2}(x^2 + p^2)\right). \tag{3.101}$$

Podstawiając $2E_0 = x_0^2 + p_0^2$ uzyskujemy rezultat

$$p_0(E) = e^{-(E+E_0)} I_0\left(2\sqrt{E_0 E}\right), \tag{3.102}$$

gdzie $I_0(z)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju. Rozkład ten został naniesiony jako pomarańczowa krzywa w górnym wykresie rysunku 3.13. Ponownie stwierdzamy, że przybliżenie ciągłe sprawdza się nawet w przypadku stosunkowo rzadkiej sieci detektorów. Pewną rozbieżność z danymi numerycznymi należy uzasadnić tym, że zostały one zebrane nie ściśle dla chwili zerowej – dla histogramu uwzględniono wszystkie kliknięcia następujące w interwale $0 < t < 2\pi$, a zatem jest on uśrednieniem po pierwszej oscylacji.



Rysunek 3.13: Rozkład energii dla zespołu trajektorii cząstki w potencjale harmonicznym uzyskanych metodą MCWF. Niebieskie histogramy przedstawiają dane numeryczne. Górny wykres przedstawia rozkład dla początku symulacji, natomiast dolny wykres odpowiada rozkładowi po "długim czasie", tzn. po wielu oscylacjach. Pomarańczowa krzywa w górnym wykresie to funkcja z równania (3.102), natomiast w dolnym wykresie widoczne jest dopasowanie funkcji (3.103). Zwracamy uwagę, że oznaczenia $t = 0$ i $t = 200$ stanowią przybliżenia, ponieważ dane do histogramów zostały w obu przypadkach zebrane z interwału czasowego odpowiadającego jednej oscylacji.

Dla dłuższych czasów, $p_t(E)$ przechodzi w rozkład termiczny:

$$p_t(E) = \frac{1}{\epsilon(t)} e^{-E/\epsilon(t)}, \tag{3.103}$$

Średnia (a zarazem szerokość) $\epsilon(t)$ tego rozkładu jest funkcją czasu. Wprowadzając $\epsilon = kT$, możemy zdefiniować formalnie temperaturę układu, a wielokrotną detekcję cząstki utożsamić z "grzaniem". Dla długich czasów $kT(t) = \langle E \rangle = \delta^2(t) \approx Dt$, jak potwierdzają rachunki numeryczne. Rozkład termiczny przedstawiony jest na dolnym wykresie rysunku 3.13.

Rozdział 4

Podsumowanie i perspektywy

Niniejsza praca stanowi propozycję nowego modelu ciągłego pomiaru położenia i pędu cząstki kwantowej. Model ten daje się całkowicie zdefiniować w ramach współczesnej teorii pomiaru kwantowego, czyli formalizmie miary dodatnio określonych operatorów oraz stochastycznego równania Schrödingera. Jako operatory pomiaru postuluje on operatory rzutujące na stany gaussowskie o dobrze zdefiniowanym położeniu i pędzie. Ze względu na to nosi on pewne podobieństwo do starszej rzutowej teorii pomiaru kwantowego, chociaż niewątpliwie jest jej rozszerzeniem.

Główną część pracy stanowi analiza trajektorii wynikających ze stochastycznych równań zapisanych dla wyżej wspomnianych operatorów przeskoku i wygenerowanych metodą Monte Carlo Wavefunction. Symulacje te uzupełniane są rachunkami analitycznymi, które pozwalają na głębsze zrozumienie obserwowanych zjawisk. Pomimo swojej prostoty, model prowadzi do bogatej palety zachowań dynamicznych. W pracy porządkujemy je, badając stopniowo coraz to bardziej skomplikowane przypadki: modyfikujemy liczbę detektorów monitorujących cząstkę oraz parametry takie jak intensywność detekcji, odległość między detektorami oraz prędkość początkową cząstki.

Wyniki symulacji wskazują między innymi na występowanie efektu Zenona przy wysokiej intensywności obserwacji. Rachunki te uzupełniamy wyprowadzeniem wzoru opisującego opóźnienie cząstki ze względu na jej monitorowanie. Średnia trajektoria odbiega od ruchu klasycznego także w przypadku słabego monitorowania, prowadząc do dynamiki "skokowej". Nasze badania dotyczą przypadków cząstki swobodnej oraz w zewnętrznym potencjale harmonicznym. W obu przypadkach szczególną uwagę poświęciliśmy dyspersji trajektorii w czasie. Zależność stałej dyfuzji od parametrów

modelu wyprowadzamy na dwa sposoby – w sposób fenomenologiczny (na podstawie danych z symulacji) oraz analitycznie z klasycznego, stochastycznego modelu ruchu.

Nasza propozycja różni się od badanych dotychczas modeli pomiaru na kilka sposobów. W literaturze spotyka się zazwyczaj opis ciągłego pomiaru rozumianego jako seria nieskończenie częstych i słabych pomiarów cząstki. W przeciwieństwie do tego, w naszym modelu detekcje cząstki następują w dyskretnych chwilach w czasie i odpowiadają skokowym zmianom stanu cząstki, tak jak dzieje się to np. w przypadku emisji lub absorpcji fotonu. Częstotliwość tych detekcji daje się kontrolować za pomocą parametrów modelu. Ponadto w literaturze rozważany jest zazwyczaj ciągły pomiar tylko jednej zmiennej dynamicznej, jak na przykład położenia. Jednoczesny pomiar położenia i pędu w naszym modelu traktuje na równi obie zmienne. Rozważenie cząstki swobodnej i w pułapce harmonicznej pozwala zrozumieć, jak dynamika zmienia się, gdy jedna z obserwabli wyróżniona jest przez Hamiltonian. Kolejną szczególną cechą naszego modelu jest charakter dynamiki generowanej przez rozmieszczone równomiernie w przestrzeni fazowej detektory. Ta dodatkowa symetria pozwala na uproszczenie rachunków i analizę problemu za pomocą pojęć z teorii odnowy. Na jej podstawie opracowaliśmy także algorytm, który w przypadku rzadkiej sieci detektorów pozwala na ścisłe i wydajne obliczeniowo wyznaczenie dynamiki wielkości statystycznych. Jednym z ważniejszych rezultatów jest pokazanie, że w granicy ciągłej obserwacji kwantowa dynamika monitorowanej cząstki sprowadza się do klasycznego procesu stochastycznego: ruchu zgodnego z równaniem Newtona, na które nałożony jest biały szum. Nie wiemy, czy nasz model ma szansę na doświadczalną realizację. Mamy nadzieję, że główne jego przewidywania są uniwersalne.

Nasza praca nie wyczerpuje możliwości rozwiniętego przez nas modelu. Może więc zostać rozumiana jako przyczynek do przyszłych badań. Do otwartych pytań należy na przykład, czy średnie podążanie cząstki wzdłuż klasycznych trajektorii daje się uzyskać dla dowolnego potencjału zewnętrznego. Ponadto w tej pracy rozważaliśmy wyłącznie rzutowanie na stany Gaussowskie minimalizujące zasadę nieoznaczoności. Można więc uogólnić model wprowadzając pomiary "niedokładne". Podobnie obiecujące wydaje się wprowadzenie asymetrii między położeniem a pędem poprzez ściśnięte stany pomiarowe (ang. squeezed states), tzn. takie, w których jedna zmienna mierzona jest znacznie dokładniej, kosztem większej niepewności w wielkości sprzężonej. Porzucenie regularnego rozmieszczenia detektorów w przestrzeni fazowej uniemożliwi zastosowanie wielu technik analitycznych wykorzystanych w niniejszej pracy, ale może prowadzić też do nowych ciekawych zjawisk jak ruch chaotyczny albo lokalizacja Andersona. Do podobnych rezultatów mogłoby prowadzić także uzależnienie intensywności pomiaru γ od czasu lub położenia detektora.

Literatura

[AFU16] Y. Ashida, S. Furukawa, and M. Ueda, *Quantum critical behavior influenced by measurement backaction in ultracold gases*, Physical Review A **94**, 5 (2016).

[AK65] E. Arthurs and J. L. Kelly, *On the Simultaneous Measurement of a Pair of Conjugate Observables*, Bell System Technical Journal **44**, 4 (1965), pp. 725–729.

[Arm+02] M. A. Armen et al., *Adaptive Homodyne Measurement of Optical Phase*, Physical Review Letters **89**, 13 (2002).

[Arn74] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1974.

[AU17] Y. Ashida and M. Ueda, *Multiparticle quantum dynamics under real-time observation*, Physical Review A **95**, 2 (2017).

[AU18] Y. Ashida and M. Ueda, *Full-Counting Many-Particle Dynamics: Nonlocal and Chiral Propagation of Correlations*, Physical Review Letters **120**, 18 (2018).

[Bar83] A. Barchielli, *Continual measurements for quantum open systems*, Il Nuovo Cimento B Series 11 **74**, 2 (1983), pp. 113–138.

[Bar86] A. Barchielli, *Measurement theory and stochastic differential equations in quantum mechanics*, Physical Review A **34**, 3 (1986), pp. 1642–1649.

[Bar90] A. Barchielli, *Direct and heterodyne detection and other applications of quantum stochastic calculus to quantum optics*, Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B **2**, 6 (1990), pp. 423–441.

[Bar93] A. Barchielli, *Stochastic differential equations anda posteriori states in quantum mechanics*, International Journal of Theoretical Physics **32**, 12 (1993), pp. 2221–2233.

[Bas+13] A. Bassi et al., *Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests*, Reviews of Modern Physics **85**, 2 (2013), pp. 471–527.

[BB75] I. Białynicki-Birula and Z. Białynicka-Birula, *Quantum electrodynamics*, Elsevier, 1975.

[Bel64] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics Physique Fizika **1**, 3 (1964), pp. 195–200.

[Bel82] J. S. Bell, *On the impossible pilot wave*, Foundations of Physics **12**, 10 (1982), pp. 989–999.

[Bel87] V. Belavkin, "Non-Demolition Measurement and Control in Quantum Dynamical Systems", *Information Complexity and Control in Quantum Physics*, Springer Vienna, 1987, pp. 311–329.

[Bel92] V. P. Belavkin, *Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering*, Journal of Multivariate Analysis **42**, 2 (1992), pp. 171–201.

[Ber+86] J. C. Bergquist et al., *Observation of Quantum Jumps in a Single Atom*, Physical Review Letters **57**, 14 (1986), pp. 1699–1702.

[BHJ00] T. Bhattacharya, S. Habib, and K. Jacobs, *Continuous Quantum Measurement and the Emergence of Classical Chaos*, Physical Review Letters **85**, 23 (2000), pp. 4852–4855.

[BHJ03] T. Bhattacharya, S. Habib, and K. Jacobs, *Continuous quantum measurement and the quantum to classical transition*, Physical Review A **67**, 4 (2003).

[BKT92] V. B. Braginsky, F. Y. Khalili, and K. S. Thorne, *Quantum Measurement*, Cambridge University Press, 1992.

[BL85] A. Barchielli and G. Lupieri, *Quantum stochastic calculus, operation valued stochastic processes, and continual measurements in quantum mechanics*, Journal of Mathematical Physics **26**, 9 (1985), pp. 2222–2230.

[BLP82] A. Barchielli, L. Lanz, and G. M. Prosperi, *A model for the macroscopic description and continual observations in quantum mechanics*, Il Nuovo Cimento B **72**, 1 (1982), pp. 79–121.

[Boh06] D. Bohm, *The Undivided Universe*, Routledge, 2006.

[Boh13] N. Bohr, *XXXVII. iOn the constitution of atoms and molecules/i*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **26**, 153 (1913), pp. 476–502.

[Boh34] N. Bohr, *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge University Press, 1934.

[Boh52a] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*, Physical Review **85**, 2 (1952), pp. 166–179.

[Boh52b] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II*, Physical Review **85**, 2 (1952), pp. 180–193.

[Boh87] N. Bohr, *Essays 1958–1962 on Atomic Physics and Human Knowledge*, Ox Bow Press, 1987.

[Bor26] M. Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Zeitschrift für Physik **37**, 12 (1926), pp. 863–867.

[Bru+97] T. Brun et al., *From quantum trajectories to classical orbits*, Physics Letters A **229**, 5 (1997), pp. 267–272.

[BS92] V. P. Belavkin and P. Staszewski, *Nondemolition observation of a free quantum particle*, Physical Review A **45**, 3 (1992), pp. 1347–1356.

[BV09] G. Bacciagaluppi and A. Valentini, *Quantum Theory at the Crossroads*, Cambridge University Press, 2009.

[Cam07] K. Camilleri, *Bohr, Heisenberg and the divergent views of complementarity*, Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics **38**, 3 (2007), pp. 514–528.

[Car93] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer Berlin Heidelberg, 1993.

[Chr+22] R. Christie et al., *Quantum-jump vs stochastic Schrödinger dynamics for Gaussian states with quadratic Hamiltonians and linear Lindbladians*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, 45 (2022), p. 455302.

[CK85] R. J. Cook and H. J. Kimble, *Possibility of Direct Observation of Quantum Jumps*, Physical Review Letters **54**, 10 (1985), pp. 1023–1026.

[CM87] C. M. Caves and G. J. Milburn, *Quantum-mechanical model for continuous position measurements*, Physical Review A **36**, 12 (1987), pp. 5543–5555.

[Dav76] E. B. Davies, *Quantum theory of open systems*, Academic Press, London, 1976.

[DCM92] J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, *Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics*, Physical Review Letters **68**, 5 (1992), pp. 580–583.

[Deh75] H. Dehmelt, *Proposed* $10^{14}\Delta\nu/\nu < \nu$ *laser fluorescence spectroscopy on Tl+ mono-ion oscillator II*, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, 60 (1975).

[DG90] T. Dittrich and R. Graham, *Continuous quantum measurements and chaos*, Physical Review A **42**, 8 (1990), pp. 4647–4660.

[Dió87] L. Diósi, *A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics*, Physics Letters A **120**, 8 (1987), pp. 377–381.

[Dió88] L. Diósi, *Continuous quantum measurement and itô formalism*, Physics Letters A **129**, 8-9 (1988), pp. 419–423.

[Dió89] L. Diósi, *Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations*, Physical Review A **40**, 3 (1989), pp. 1165–1174.

[Dir30] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1930.

[DZR92] R. Dum, P. Zoller, and H. Ritsch, *Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission*, Physical Review A **45**, 7 (1992), pp. 4879–4887.

[Eve57] H. Everett, *"Relative State" Formulation of Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics **29**, 3 (1957), pp. 454–462.

[Fer54] E. Fermi, *Polarization of high energy protons scattered by nuclei*, Il Nuovo Cimento **11**, 4 (1954), pp. 407–411.

[FGR01] M. C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, and M. G. Raizen, *Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System*, Physical Review Letters **87**, 4 (2001).

[FL92] H. Fearn and W. E. Lamb, *Computational approach to the quantum Zeno effect: Position measurements*, Physical Review A **46**, 3 (1992), pp. 1199–1205.

[FPW54] H. Feshbach, C. E. Porter, and V. F. Weisskopf, *Model for Nuclear Reactions with Neutrons*, Physical Review **96**, 2 (1954), pp. 448–464.

[Fuc10] C. A. Fuchs, *QBism, the Perimeter of Quantum Bayesianism*, 2010, arXiv: `1003.5209 [quant-ph]`.

[Gar85] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, Springer, Berlin, 1985.

[Gis84] N. Gisin, *Quantum Measurements and Stochastic Processes*, Physical Review Letters **52**, 19 (1984), pp. 1657–1660.

[GP92] N. Gisin and I. C. Percival, *The quantum-state diffusion model applied to open systems*, Journal of Physics A: Mathematical and General **25**, 21 (1992), pp. 5677–5691.

[GPR90] G. C. Ghirardi, P. Pearle, and A. Rimini, *Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles*, Physical Review A **42**, 1 (1990), pp. 78–89.

[GPZ92] C. W. Gardiner, A. S. Parkins, and P. Zoller, *Wave-function quantum stochastic differential equations and quantum-jump simulation methods*, Physical Review A **46**, 7 (1992), pp. 4363–4381.

[GRW86] G. C. Ghirardi, A. Rimini, and T. Weber, *Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems*, Physical Review D **34**, 2 (1986), pp. 470–491.

[GWM93] M. J. Gagen, H. M. Wiseman, and G. J. Milburn, *Continuous position measurements and the quantum Zeno effect*, Physical Review A **48**, 1 (1993), pp. 132–142.

[Har68] J. B. Hartle, *Quantum Mechanics of Individual Systems*, American Journal of Physics **36**, 8 (1968), pp. 704–712.

[Hei27] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik **43**, 3-4 (1927), pp. 172–198.

[Hei30] W. Heisenberg, *Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, S. Hirzel Verlag, 1930.

[Hei58] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy: The Revolution In Modern Science*, Harper and Brothers, 1958.

[Ita+90] W. M. Itano et al., *Quantum Zeno effect*, Physical Review A **41**, 5 (1990), pp. 2295–2300.

[Jav86] J. Javanainen, *Possibility of quantum jumps in a three-level system*, Physical Review A **33**, 3 (1986), pp. 2121–2123.

[JZ85] E. Joos and H. D. Zeh, *The emergence of classical properties through interaction with the environment*, Zeitschrift für Physik B Condensed Matter **59**, 2 (1985), pp. 223–243.

[Kal96] "III - The Causality Problem in Atomic Physics", *Foundations of Quantum Physics II (1933–1958)*, ed. by J. Kalckar, vol. 7, Niels Bohr Collected Works, Elsevier, 1996, pp. 299–322.

[Kas14] R. E. Kastner, *'Einselection' of pointer observables: The new H-theorem?*, Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics **48** (2014), pp. 56–58.

[Kra83] K. Kraus, *States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer Berlin Heidelberg, 1983.

[KS67] S. Kochen and E. Specker, *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Indiana University Mathematics Journal **17**, 1 (1967), pp. 59–87.

[Lam64] W. E. Lamb, *Theory of an Optical Maser*, Physical Review **134**, 6A (1964), A1429–A1450.

[Lan27] L. D. Landau, *Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik*, Z. Physik **45**, 430 (1927).

[Leg02] A. J. Leggett, *Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects*, Journal of Physics: Condensed Matter **14**, 15 (2002), R415–R451.

[Lei+03] D. Leibfried et al., *Quantum dynamics of single trapped ions*, Reviews of Modern Physics **75**, 1 (2003), pp. 281–324.

[Lin76] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Communications in Mathematical Physics **48**, 2 (1976), pp. 119–130.

[LL58] L. Landau and E. Lifszic, *Mechanika kwantowa. Teoria nierelatywistyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.

[LR00] M. Lewenstein and K. Rzażewski, *Quantum anti-Zeno effect*, Physical Review A **61**, 2 (2000).

[Lüd50] G. Lüders, *Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß*, Annalen der Physik **443**, 5-8 (1950), pp. 322–328.

[Men79] M. B. Mensky, *Quantum restrictions for continuous observation of an oscillator*, Physical Review D **20**, 2 (1979), pp. 384–387.

[Min+19] Z. K. Minev et al., *To catch and reverse a quantum jump mid-flight*, Nature **570**, 7760 (2019), pp. 200–204.

[Mot29] N. F. Mott, *The wave mechanics of $\propto$-Ray tracks*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **126**, 800 (1929), pp. 79–84.

[MS77] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, *The Zeno's paradox in quantum theory*, Journal of Mathematical Physics **18**, 4 (1977), pp. 756–763.

[Neu+78] W. Neuhauser et al., *Optical-Sideband Cooling of Visible Atom Cloud Confined in Parabolic Well*, Physical Review Letters **41**, 4 (1978), pp. 233–236.

[Neu32] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[NSD86] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt, *Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps*, Physical Review Letters **56**, 26 (1986), pp. 2797–2799.

[Oli14] A. C. Oliveira, *Classical limit of quantum mechanics induced by continuous measurements*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **393** (2014), pp. 655–668.

[Pea89] P. Pearle, *Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization*, Physical Review A **39**, 5 (1989), pp. 2277–2289.

[Pen96] R. Penrose, *On Gravity's role in Quantum State Reduction*, General Relativity and Gravitation **28**, 5 (1996), pp. 581–600.

[Per02] A. Peres, *Karl Popper and the Copenhagen interpretation*, Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics **33**, 1 (2002), pp. 23–34.

[Per93] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Springer, 1993.

[PS94] P. Pearle and E. Squires, *Bound state excitation, nucleon decay experiments and models of wave function collapse*, Physical Review Letters **73**, 1 (1994), pp. 1–5.

[Red65] A. Redfield, "The Theory of Relaxation Processes", *Advances in Magnetic Resonance*, Elsevier, 1965, pp. 1–32.

[Rov96] C. Rovelli, *Relational quantum mechanics*, International Journal of Theoretical Physics **35**, 8 (1996), pp. 1637–1678.

[Sau+86] T. Sauter et al., *Observation of Quantum Jumps*, Physical Review Letters **57**, 14 (1986), pp. 1696–1698.

[SB15] A. Smirne and A. Bassi, *Dissipative Continuous Spontaneous Localization (CSL) model*, Scientific Reports **5**, 1 (2015).

[Sch52a] E. Schrödinger, *Are there quantum jumps? I*, The British Journal for the Philosophy of Science **3**, 10 (1952), pp. 109–123.

[Sch52b] E. Schrödinger, *Are there quantum jumps? II*, The British Journal for the Philosophy of Science **3**, 11 (1952), pp. 233–242.

[SD81] M. Srinivas and E. Davies, *Photon Counting Probabilities in Quantum Optics*, Optica Acta: International Journal of Optics **28**, 7 (1981), pp. 981–996.

[SM01] A. J. Scott and G. J. Milburn, *Quantum nonlinear dynamics of continuously measured systems*, Physical Review A **63**, 4 (2001).

[Smi+02] W. P. Smith et al., *Capture and Release of a Conditional State of a Cavity QED System by Quantum Feedback*, Physical Review Letters **89**, 13 (2002).

[SW97] S. Stenholm and M. Wilkens, *Jumps in quantum theory*, Contemporary Physics **38**, 4 (1997), pp. 257–268.

[VS76] A. K. V. Gorini and E. C. G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semi-groups of N-level systems*, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).

[WM09] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Measurement and Control*, Cambridge University Press, 2009.

[WM93] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum theory of optical feedback via homodyne detection*, Physical Review Letters **70**, 5 (1993), pp. 548–551.

[Zeh70] H. D. Zeh, *On the interpretation of measurement in quantum theory*, Foundations of Physics **1**, 1 (1970), pp. 69–76.

[Zur03] W. H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Reviews of Modern Physics **75**, 3 (2003), pp. 715–775.

[Zur09] W. H. Zurek, *Quantum Darwinism*, Nature Physics **5**, 3 (2009), pp. 181–188.

[Zur81] W. H. Zurek, *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?*, Physical Review D **24**, 6 (1981), pp. 1516–1525.

[Zur82] W. H. Zurek, *Environment-induced superselection rules*, Physical Review D **26**, 8 (1982), pp. 1862–1880.

Załączniki

Poniżej załączone są zgody wydawców na użycie rysunków opublikowanych w pracach

1. Filip Gampel, Mariusz Gajda
   Continuous simultaneous measurement of position and momentum of a particle
   Physical Review A **107**, 012420 (2023)

2. Filip Gampel, Mariusz Gajda
   On repeated measurements of a quantum particle in a harmonic potential
   Acta Physica Polonica A **143** (6), s. 131 (2023)

ACTA PHYSICA POLONICA A

PUBLISHED BY
THE INSTITUTE OF PHYSICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
AL. LOTNIKÓW 32/46
02-668 WARSAW, POLAND

PHONE:(+48 22)843-06-05, 847-10-51, 843-51-65
FAX: (+48 22)843-09-26
E-MAIL: appol@ifpan.edu.pl
E-MAIL for files: gawrys@ifpan.edu.pl
TLX: 812468 ifpl

Warszawa, 20 czerwca 2021 r.

Mgr. Filip Gampel
Instytut Fizyki PAN
Warszawa

Redakcja Acta Physica Polonica A wyraża zgodę na wykorzystanie wszystkich rysunków z pracy: Filip Gampel, Mariusz Gajda, On repeated measurements of a quantum particle in a harmonic potential Acta Physica Polonica A 143 (6), s. 131 (2023) w Pana pracy doktorskiej pt. „Ciągły pomiar położenia i pędu cząstki kwantowej" , złożonej do Rady Naukowej Instytutu Fizyki PAN.

Jan Mostowski

Jan Mostowski

Redaktor Naczelny

American Physical Society
Reuse and Permissions License

22-Jun-2023

This license agreement between the American Physical Society ("APS") and Filip Gampel ("You") consists of your license details and the terms and conditions provided by the American Physical Society and SciPris.

Licensed Content Information

License Number:	**RNP/23/JUN/067729**
License date:	22-Jun-2023
DOI:	10.1103/PhysRevA.107.012420
Title:	Continuous simultaneous measurement of position and momentum of a particle
Author:	Filip Gampel and Mariusz Gajda
Publication:	Physical Review A
Publisher:	American Physical Society
Cost:	USD $ 0.00

Request Details

Does your reuse require significant modifications: No

Specify intended distribution locations:	Poland
Reuse Category:	Reuse in a thesis/dissertation
Requestor Type:	Author of requested content
Items for Reuse:	Figures/Tables
Number of Figure/Tables:	8
Figure/Tables Details:	Fig. 1 and Fig 3-9.
Format for Reuse:	Print
Total number of print copies:	Up to 1000

Information about New Publication:

University/Publisher:	Institute of Physics, Polish Academy of Sciences
Title of dissertation/thesis:	Ciągły pomiar położenia i pędu cząstki kwantowej
Author(s):	Filip Gampel
Expected completion date:	Jun. 2023

License Requestor Information

Name:	Filip Gampel
Affiliation:	Individual
Email Id:	gampel@ifpan.edu.pl
Country:	Poland

American Physical Society
Reuse and Permissions License

TERMS AND CONDITIONS

The American Physical Society (APS) is pleased to grant the Requestor of this license a non-exclusive, non-transferable permission, limited to Print format, provided all criteria outlined below are followed.

1. You must also obtain permission from at least one of the lead authors for each separate work, if you haven't done so already. The author's name and affiliation can be found on the first page of the published Article.
2. For electronic format permissions, Requestor agrees to provide a hyperlink from the reprinted APS material using the source material's DOI on the web page where the work appears. The hyperlink should use the standard DOI resolution URL, http://dx.doi.org/{DOI}. The hyperlink may be embedded in the copyright credit line.
3. For print format permissions, Requestor agrees to print the required copyright credit line on the first page where the material appears: "Reprinted (abstract/excerpt/figure) with permission from [(FULL REFERENCE CITATION) as follows: Author's Names, APS Journal Title, Volume Number, Page Number and Year of Publication.] Copyright (YEAR) by the American Physical Society."
4. Permission granted in this license is for a one-time use and does not include permission for any future editions, updates, databases, formats or other matters. Permission must be sought for any additional use.
5. Use of the material does not and must not imply any endorsement by APS.
6. APS does not imply, purport or intend to grant permission to reuse materials to which it does not hold copyright. It is the requestor's sole responsibility to ensure the licensed material is original to APS and does not contain the copyright of another entity, and that the copyright notice of the figure, photograph, cover or table does not indicate it was reprinted by APS with permission from another source.
7. The permission granted herein is personal to the Requestor for the use specified and is not transferable or assignable without express written permission of APS. This license may not be amended except in writing by APS.
8. You may not alter, edit or modify the material in any manner.
9. You may translate the materials only when translation rights have been granted.
10. APS is not responsible for any errors or omissions due to translation.
11. You may not use the material for promotional, sales, advertising or marketing purposes.
12. The foregoing license shall not take effect unless and until APS or its agent, Aptara, receives payment in full in accordance with Aptara Billing and Payment Terms and Conditions, which are incorporated herein by reference.
13. Should the terms of this license be violated at any time, APS or Aptara may revoke the license with no refund to you and seek relief to the fullest extent of the laws of the USA. Official written notice will be made using the contact information provided with the permission request. Failure to receive such notice will not nullify revocation of the permission.
14. APS reserves all rights not specifically granted herein.
15. This document, including the Aptara Billing and Payment Terms and Conditions, shall be the entire agreement between the parties relating to the subject matter hereof.