

*Jacek Dobrzyniecki*

# Tunelowanie kilku oddziałujących ultrazimnych atomów do otwartej przestrzeni

ROZPRAWA DOKTORSKA

przedstawiona Radzie Naukowej Instytutu Polskiej Akademii Nauk

przygotowana w Instytucie Fizyki Polskiej Akademii Nauk  
pod kierunkiem dra hab. Tomasza Sowińskiego, prof. IF PAN



Warszawa, 2020



11  
Warszawa, ..... września 2020 r.

**OŚWIADCZENIE**  
autora rozprawy doktorskiej

Jako autor rozprawy doktorskiej pod tytułem:

**Tunelowanie kilku oddziałujących ultrazimnych atomów do otwartej przestrzeni**

przygotowanej pod kierunkiem dra hab. Tomasza Sowińskiego, prof. IF PAN,  
przedłożonej Radzie Naukowej Instytutu Fizyki Polskiej Akademii Nauk  
oświadczam, że:

- 1) rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami (ustawa z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych – t.j. Dz. U. z 2006 r., Nr 90, poz. 631 z późn. zm.),
- 2) rozprawa nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem stopnia naukowego w innym przewodzie doktorskim,
- 3) rozprawa doktorska w wersji cyfrowej umieszczona na załączonym nośniku danych jest tożsama z wersją wydrukowaną i przedłożoną w moim przewodzie doktorskim.
- 4) udzielam nieodpłatnie Instytutowi Fizyki Polskiej Akademii Nauk licencji niewyłącznej na umieszczenie pełnego tekstu ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej na stronie internetowej Instytutu w domenie ifpan.edu.pl i tym samym udostępnienie jej treści dla wszystkich w sieci Internet.

*Joach Dobrowiecki*





Warszawa, <sup>11</sup>..... września 2020 r.

## OŚWIADCZENIE

Jako współautor publikacji naukowych

1. J. Dobrzyniecki, T. Sowiński  
„*Dynamics of a few interacting bosons escaping from an open well*”  
Phys. Rev. A **98**, 013634 (2018)
2. J. Dobrzyniecki, T. Sowiński  
„*Momentum correlations of a few ultra-cold bosons escaping from an open well*”  
Phys. Rev. A **99**, 063608 (2019)
3. J. Dobrzyniecki, T. Sowiński  
„*Two Rydberg-dressed atoms escaping from an open well*”  
ArXiv:2009.04839 (2020)

stanowiących podstawę rozprawy doktorskiej mgra Jacka Dobrzynieckiego oświadczam, że w mojej ocenie wkład mgra Jacka Dobrzynieckiego na każdym etapie ich powstawania był dominujący, tj. od opracowania koncepcji i pomysłu przeprowadzenia badań, poprzez napisanie i przetestowanie programów do prowadzenia symulacji, przeprowadzenie symulacji i weryfikację otrzymanych danych, aż po opracowanie koncepcji i stworzenie pierwszych szkiców publikacji naukowych. We wszystkich tych publikacjach mgr Dobrzyniecki pełnił również funkcję autora korespondującego. Moja rola przy powstawaniu tych publikacji polegała przede wszystkim na nadzorze merytorycznym wykonywanych prac, zwracaniu uwagi na możliwe do wykonania testy weryfikujące poprawność działania programów komputerowych, konsultacji przy interpretowaniu otrzymywanych wyników, wskazywaniu możliwych do podjęcia dalszych kierunków badań mogących wzbogacić uzyskane wyniki, a także na współudziale w stworzeniu końcowych wersji publikacji naukowych.



## **Streszczenie pracy doktorskiej**

W rozprawie badam teoretycznie zagadnienie kwantowego tunelowania przez obszar klasycznie zabroniony, koncentrując się na jednowymiarowym układzie kilku silnie skorelowanych cząstek tunelujących ze studni potencjału do otwartej przestrzeni. Motywacją do podjęcia badań są współczesne eksperymenty w dziedzinie fizyki atomowej nad dynamicznymi własnościami ultrazimnych gazów. Dlatego też rozważam typowy scenariusz, w którym oddziałujące cząstki są początkowo przygotowane w studni harmoniczej, która następnie zostaje nagle otwarta z jednej strony, tak, że cząstki zaczynają tunelować do otwartej przestrzeni. Za pomocą ścisłej symulacji numerycznej bezpośrednio analizuję dynamikę tego układu z punktu widzenia wielkości fizycznych, pozwalających odróżnić od siebie różne kanały rozpadu (tunelowanie sekwencyjne, tunelowanie par, tunelowanie trimerów itp.) i określić ich względny udział w rozpadzie stanu początkowego. W celu przedstawienia jak najbardziej pełnego opisu rozważam cząstki o różnej statystyce (bozony lub fermiony), a także oddziaływania o różnym zasięgu.

Najważniejszą tezą rozprawy jest stwierdzenie, że dominujący kanał rozpadu zmienia się nagle, gdy siła oddziaływań przekracza pewne krytyczne wartości. Zmiany te są odzwierciedlone w różnych wielkościach fizycznych mierzalnych eksperymentalnie, takich jak stała rozpadu stanu początkowego czy rozkład pędów emitowanych cząstek. W pracy demonstruję, jak poprzez zmianę parametrów problemu można zmieniać dynamiczne własności tunelujących cząstek. I odwrotnie - poprzez pomiar tych własności można precyzyjnie ustalać wartości parametrów doświadczalnych. Z tego punktu widzenia, choć rozprawa ma charakter czysto teoretyczny, jej wyniki mogą mieć duże znaczenie doświadczalne. Mogą one bowiem otworzyć drogę do lepszego zrozumienia dynamiki tunelujących układów kilku cząstek oraz zwiększenia kontroli eksperymentalnej nad takimi układami.

## **Summary of the doctoral thesis**

In this work I theoretically analyze the dynamics of quantum tunneling through a classically forbidden region, focusing on a one-dimensional system of a few strongly correlated particles, tunneling from a potential well into open space. This research was motivated by the modern experiments in atomic physics, studying the dynamical properties of ultracold gases. Therefore, I consider a typical scenario where the particles are initially prepared inside a harmonic well, which is then suddenly opened from one side so that the particles can tunnel into open space. By means of an exact numerical simulation, I directly analyze the system dynamics from the point of view of physical observables that allow to distinguish between various decay channels (sequential tunneling, pair tunneling, trimer tunneling etc.) and determine their relative participation in the decay of the initial state. In order to make the description as complete as possible, I consider particles with different statistics (bosons or fermions) as well as interactions with varying ranges.

The most significant thesis of this work is that the dominant decay mechanism changes abruptly as the interaction strength crosses certain critical values. These changes are reflected in experimentally measurable quantities, such as the decay rate of the initial state, or the momentum distributions of the emitted particles. I demonstrate that by tuning the parameters of the problem it is possible to modify the dynamical properties of the tunneling particles, and conversely, by measuring these properties, it is possible to precisely determine the experimental parameters. From this point of view, though the work is purely theoretical, its results can be significant to experiments. Specifically, they can open a way to a better understanding of the dynamics of tunneling systems, and to exerting greater experimental control over such systems.



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bozony oddziałujące kontaktowo</b>	<b>5</b>
2.1	Hamiltonian układu wielociałowego . . . . .	5
2.2	Widmo hamiltonianu wielociałowego . . . . .	8
2.3	Stan początkowy układu . . . . .	11
2.4	Dynamika po otwarciu studni . . . . .	13
2.5	Proste wyjaśnienie fenomenologiczne . . . . .	22
2.6	Rola kształtu potencjału . . . . .	23
2.7	Rozkłady pędów tunelujących cząstek . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Bozony z oddziaływaniami o skończonym zasięgu</b>	<b>35</b>
3.1	Hamiltonian układu wielociałowego . . . . .	35
3.2	Widmo hamiltonianu wielociałowego . . . . .	37
3.3	Stan początkowy układu . . . . .	41
3.4	Dynamika po otwarciu studni . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Fermiony z oddziaływaniami o skończonym zasięgu</b>	<b>49</b>
4.1	Hamiltonian układu wielociałowego i jego widmo . . . . .	49
4.2	Stan początkowy układu . . . . .	52
4.3	Dynamika po otwarciu studni . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Wnioski i zakończenie</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Wykorzystanie potencjału absorbującego do symulacji nieskończonej przestrzeni</b>	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>Identyfikacja mechanizmów tunelowania przez analizę prądu prawdopodobieństwa</b>	<b>65</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>



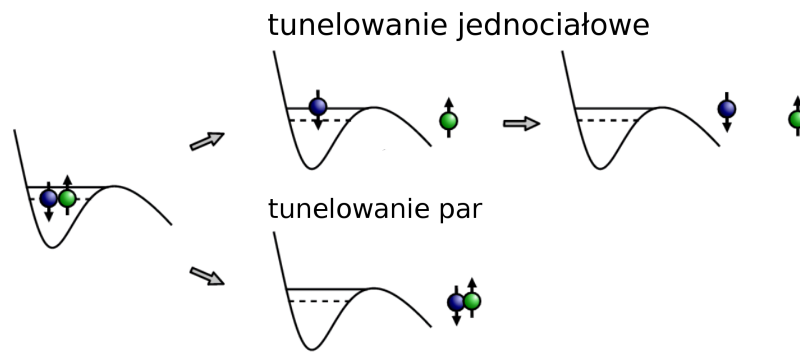
# Rozdział 1

## Wstęp

Tunelowanie cząstki przez obszar klasycznie zabroniony jest jednym z najbardziej interesujących przewidywań mechaniki kwantowej. Zjawisko to jest kluczowe m. in. przy opisie dynamiki cząstek w potencjale podwójnej studni [1, 2] lub w sieciach optycznych [3, 4]. Jednak zupełnie inną klasą problemu jest tunelowanie cząstek ze studni potencjału do pustej przestrzeni. Fundamentalne znaczenie tego zagadnienia zostało pokazane w 1928 roku, kiedy wykorzystano je do wyjaśnienia zjawiska jądrowego rozpadu  $\alpha$ , opierającego się wytłumaczeniu na gruncie fizyki klasycznej [5, 6]. Od tamtej pory model cząstek tunelujących do otwartej przestrzeni znalazł zastosowanie w analizie wielu zjawisk fizycznych, takich jak rozpady jądrowe [7–11], fuzja [12], fizja [13], fotoasocjacja [14], fotodysocjacja [15] czy funkcjonowanie diod tunelowych [16].

Dzięki długoletniej pracy teoretycznej wiele aspektów tunelowania cząstek do otwartej przestrzeni zostało szczegółowo zbadanych. Na przykład proces tunelowania pojedynczej cząstki czy tunelowanie wielociałowego kondensatu Bosego-Einsteina są obecnie dobrze poznane [17–23]. Pomędzy tymi dwoma skrajnymi sytuacjami znajduje się problem tunelowania układu **kilku silnie oddziałujących ze sobą cząstek**, który okazuje się być znacznie bardziej skomplikowanym zagadnieniem. W takim przypadku w dynamice układu grają rolę silne korelacje międzyciałowe, w wyniku czego nie da się zredukować jego fizyki do przybliżonego opisu na poziomie jednociłowym [24]. Dlatego układy tego rodzaju budzą wiele pytań, na które wciąż nie ma satysfakcjonujących odpowiedzi.

W ostatnich latach zainteresowanie tematem kwantowego tunelowania wzrosło dzięki burzliwemu rozwojowi technik eksperymentalnych w dziedzinie fizyki ultrazimnych atomów. Pozwalają one na doświadczalną realizację układów, które wcześniej pozostawały w sferze teoretycznych rozważań. Możliwa jest precyzyjna regulacja niemal każdego parametru układu, takich jak kształt potencjału zewnętrznego [25–27], efektywna liczba wymiarów [28–31], stan początkowy [32] czy siła oddziaływań międzycząstkowych [33, 34]. Otwiera to zupełnie nowe możliwości eksperymentalnego badania podstawowych zagadnień fizyki. Z punktu widzenia zagadnienia mezoskopowych układów kwantowych tunelujących do otwartej przestrzeni, jednym z najważniejszych osiągnięć doświadczalnych ostatnich lat były eksperymenty w grupie Selima Jochima w Heidelbergu [35, 36]. W ramach tych eksperymentów wytworzono efektywnie jednowymiarowe układy, składające się z kilku fermionowych atomów  ${}^6\text{Li}$  o różnych spinach. Atomy były początkowo uwięzione w pułapce oscylatora harmonicznego, po czym potencjał zewnętrzny był nagle modyfikowany tak, by umożliwić im tunelowanie z pułapki. Badając dynamikę tego układu, autorzy stwierdzili, że wartość siły oddziaływań międzycząstkowych ma zarówno jakościowy jak i ilościowy wpływ na proces tunelowania. W przypadku układu z oddziały-



**Rysunek 1:** Możliwe mechanizmy tunelowania dla układu dwóch fermionów uwięzionych w studni [36]. Stan początkowy (z lewej) może ulec rozpadowi poprzez tunelowanie sekwencyjne (u góry), w którym fermiony opuszczają studnię jeden za drugim, bądź tunelowanie związanych par (u dołu). Zaadaptowano za zgodą wydawcy z rys. 2 w pracy [36].

waniami odpychającymi stwierdzono, że dynamika tunelowania dwóch nieidentycznych fermionów w granicy nieskończonych odpychań między nimi pokrywa się z dynamiką tunelowania dwóch identycznych, nieoddziałujących fermionów [35]. Z kolei dla układu z oddziaływaniami przyciągającymi stwierdzono, że fermiony mogą tunelować nie tylko pojedynczo, ale również jako związane pary (patrz rys. 1), przy czym w granicy silnych przyciągań tunelowanie par stanowi jedyny możliwy kanał tunelowania [36].

Eksperymenty tego rodzaju dostarczają świeżej motywacji dla teoretycznego badania właściwości układów tunelujących. W ostatnich latach ukazało się wiele prac, poświęconych tunelowaniu układów zarówno dwuciałowych [9–11, 37–48], jak i o większej liczbie cząstek [49–55]. Publikacje te skupiają się głównie na układach efektywnie jednowymiarowych. Pozwala to na wydajną symulację ewolucji układu w czasie i bezpośrednią analizę jego właściwości dynamicznych z różnych punktów widzenia. W szczególności zainteresowanie budzi kwestia, jak oddziaływania międzycząstkowe wpływają na dynamikę tunelowania układu.

W dotychczasowych pracach z tego zakresu dużo uwagi poświęca się układom dwucząstkowym. Są one najprostszym nietrywialnym przypadkiem układu kilkuciałowego, ale mimo tej prostoty odznaczają się interesującą dynamiką. Na przykład wiadomo, że w układzie tego rodzaju można wyróżnić dwa odrębne mechanizmy rozpadu stanu początkowego: tunelowanie pojedynczych cząstek bądź tunelowanie par. Zmiana siły oddziaływań międzycząstkowych ma znaczny wpływ na proporcjonalny udział obu tych mechanizmów w ogólnym procesie rozpadu [9, 40, 43, 44]. Jednak analogiczne zagadnienie dla układów o większej liczbie cząstek, w których może istnieć jeszcze większe bogactwo mechanizmów rozpadu, nie było poruszane w literaturze. Podobnie względnie mało uwagi poświęcono rozkładowi pędu cząstek uciekających ze studni. W pracach [45, 51, 54] przeanalizowano jedynie rozkłady pędu dla układów z oddziaływaniami odpychającymi i brakowało kompleksowego rozszerzenia tej analizy na pełen zakres oddziaływań, od odpychających do przyciągających.

Inną interesującą kwestią są różnice między tunelowaniem układów złożonych z cząstek o różnej statystyce (np. układy identycznych bozonów a układy identycznych fermionów). Dotychczasowe prace poruszające ten temat skupiały się na układach cząstek nieoddziałujących [47], w granicy nieskończonych sił oddziaływań [49], bądź z oddziaływaniami o ustalonym zasięgu i sile [10]. Brakowało jednak systematycznej

analizy tego zagadnienia dla układów z oddziaływaniami o dowolnie regulowanej sile i zasięgu.

Główną motywacją badań zaprezentowanych w tej rozprawie jest rzucenie światła na te dotąd niezbadane zagadnienia. W tym celu w pierwszej części rozprawy analizuję dynamikę efektywnie jednowymiarowego układu kilku ultrazimnych bozonów, które tunelują ze studni potencjału do otwartej przestrzeni. Przeprowadzam numeryczną symulację ewolucji układu w czasie, dla różnych wartości siły oddziaływań oraz dla różnych liczb cząstek (dwie lub trzy cząstki). W ten sposób analizuję dokładnie dynamikę tunelowania pod kątem różnych wielkości fizycznych, takich jak liczba cząstek pozostających w studni bądź korelacje między położeniami cząstek. W szczególności skupiam się na tym, czy cząstki tunelują ze studni pojedynczo, czy też jako większe grupy i jak odpowiedź na to pytanie zależy od siły oddziaływań. Dominujący w dynamice mechanizm tunelowania jest odzwierciedlony w możliwych do pomiaru wielkościach fizycznych, takich jak stała rozpadu stanu początkowego lub rozkład pędów uciekających cząstek. Dzięki temu realna jest weryfikacja wyników na drodze doświadczalnej. Choć przyjęty przez mnie model jest uproszczony, układy tego rodzaju są w praktyce możliwe do realizacji eksperymentalnej. W drugiej części rozprawy analizuję natomiast dynamikę układu dwóch identycznych bozonów lub fermionów, z oddziaływaniami międzycząstkowymi o dowolnie regulowanym zasięgu i sile. W ten sposób porównuję właściwości dynamiczne układów w zależności od statystyki cząstek.

## Struktura pracy

Analizę układów tunelujących rozpoczynam w rozdziale 2., w którym skupiam się na układzie kilku identycznych bozonów z oddziaływaniami kontaktowymi. Zakładam scenariusz, w którym cząstki początkowo (w chwili  $t < 0$ ) są uwięzione w studni potencjału. W chwili  $t = 0$  studnia zostaje nagle otwarta z jednej strony, tak, że bozony mogą tunelować przez barierę do otwartej przestrzeni. Rozpad stanu początkowego może wówczas zachodzić poprzez kilka różnych procesów. Na przykład dla układu dwuciałowego bozony mogą opuścić studnię pojedynczo (jeden za drugim) lub opuścić ją razem jako związana para. Aby odpowiedzieć na pytanie, w jakim stopniu różne mechanizmy rozpadu uczestniczą w całkowitym procesie tunelowania, przeprowadzam dokładną numeryczną analizę dynamiki układu dla  $t \geq 0$ . Badając ewolucję w czasie odpowiednich wielkości fizycznych, pokazuję, że udział poszczególnych mechanizmów rozpadu zależy w znaczący sposób od siły oddziaływań. Przedstawiam także prosty model teoretyczny pozwalający przewidzieć, jakie procesy tunelowania będą dostępne dla różnych sił oddziaływań. W końcowej części rozdziału opisuję rozkłady pędów tunelujących cząstek w zależności od siły oddziaływań i pokazuję, że postać tych rozkładów jest ściśle zależna od dominacji konkretnych procesów tunelowania.

W rozdziale 3. przechodzę do układu dwóch identycznych bozonów, oddziałujących potencjałem o skończonym, istotnie niezerowym zasięgu. W tym przypadku obok siły oddziaływań mamy do dyspozycji nowy parametr – zasięg oddziaływań. Choć w granicy zerowego zasięgu układ jest praktycznie równoważny układowi oddziałujących kontaktowo cząstek, zachodzi pytanie, jak zmieniają się właściwości układu dla oddziaływań o większym zasięgu. Do analizy stosuję te same metody, co poprzednio, dzięki czemu wyniki można bezpośrednio porównać z wynikami z poprzedniego rozdziału.

W rozdziale 4. idę krok dalej i analizuję układ dwóch identycznych fermionów o oddziaływaniach takich samych, jak dla bozonów z rozdziału 3. Ze względu na odmienną

statystykę, układy fermionowe mogą wykazywać diametralnie różne właściwości od układów bozonowych. Szczególnie tworzenie par między cząstkami może mieć odmienną naturę ze względu na zakaz Pauliego, uniemożliwiający fermionom przebywanie w tym samym stanie. Po raz kolejny wykorzystuję zastosowane wcześniej techniki do zbadania dynamiki tunelowania. Porównując wyniki z przypadkiem bozonów, pokazuję, jak zmiana statystyki cząstek przejawia się w dynamice układu.

Rozdział 5. stanowi podsumowanie i zakończenie pracy.

Praca została przygotowana w ramach projektu badawczego SONATA BIS finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki nr 2016/22/E/ST2/00555 realizowanego w Instytucie Fizyki Polskiej Akademii Nauk w latach 2017-2021.

## Publikacje naukowe

Część opisanych w tej rozprawie wyników było podstawą następujących artykułów:

- Jacek Dobrzyniecki, Tomasz Sowiński: *Dynamics of a few interacting bosons escaping from an open well*, Phys. Rev. A **98**, 013634 (2018).
- Jacek Dobrzyniecki, Tomasz Sowiński: *Momentum correlations of a few ultracold bosons escaping from an open well*, Phys. Rev. A **99**, 063608 (2019).
- Jacek Dobrzyniecki, Tomasz Sowiński: *Two Rydberg-dressed atoms escaping from an open well*, arXiv:2009.04839 (2020).

Jestem również współautorem innych prac, których wyniki, choć nie związane bezpośrednio z tunelowaniem do otwartej przestrzeni, stanowią szersze omówienie problemu ultrazimnych układów kilkuciałowych:

- Jacek Dobrzyniecki, Tomasz Sowiński: *Exact dynamics of two ultra-cold bosons confined in a one-dimensional double-well potential*, Eur. Phys. J. D **70**, 83 (2016).
- Jacek Dobrzyniecki, Tomasz Sowiński: *Effective two-mode description of a few ultra-cold bosons in a double-well potential*, Phys. Lett. A **382**, 394 (2018).
- Jacek Dobrzyniecki, Xikun Li, Anne E. B. Nielsen, Tomasz Sowiński: *Effective three-body interactions for bosons in a double-well confinement*, Phys. Rev. A **97**, 013609 (2018).
- Jacek Dobrzyniecki, Tomasz Sowiński: *Simulating artificial 1D physics with ultracold fermionic atoms: three exemplary themes*, Adv. Quantum Technol. **3**, 2000010 (2020).

## Podziękowania

Serdecznie dziękuję dr. hab. Tomaszowi Sowińskiemu za wieloletnią opiekę, cierpliwość, troskę i nieocenioną pomoc. Dziękuję również wszystkim pracownikom Instytutu Fizyki PAN za stworzenie znakomitej atmosfery naukowej pracy, dzięki której studia doktoranckie były dla mnie prawdziwą przyjemnością.

## Rozdział 2

# Bozony oddziałujące kontaktowo

Aby zbadać proces tunelowania układu kilkuciałowego, zaczynamy od jednego z najprostszycch przypadków – jednowymiarowego układu kilku identycznych bozonów, oddziałujących potencjałem kontaktowym. Model tego rodzaju jest często stosowany w literaturze do teoretycznego opisu ultrazimnych atomów. Wyniki poniższego rozdziału stanowią będą punkt odniesienia dla pozostałej części pracy.

Dla ustalonego potencjału zewnętrznego i liczby cząstek, o dynamice tego układu decyduje jeden tylko parametr – siła oddziaływań. Na początku rozdziału zbadamy, jak wygląda widmo stanów własnych hamiltonianu wielociałowego w zależności od siły oddziaływań, co da nam pewne pojęcie o tym, jak ten parametr wpływa na fizykę układu. Następnie dokładnie opiszemy dynamikę tunelowania układu w czasie  $t \geq 0$  (zarówno dla układu dwóch, jak i trzech bozonów), porównując wyniki dla różnych wartości siły oddziaływań.

## 2.1 Hamiltonian układu wielociałowego

### 2.1.1 Hamiltonian efektywnie jednowymiarowy

Rozważamy układ  $N$  identycznych, bezspiniowych ultrazimnych bozonów o masie  $m$ , umieszczonych w statycznym zewnętrznym potencjale. Ogólna postać hamiltonianu wielociałowego dla tego układu jest następująca:

$$H_{3D} = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{3D}(\vec{r}_i) \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N U_{3D}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (2.1)$$

gdzie  $\vec{r}_i$  oznacza pozycję  $i$ -tej cząstki. Zakładamy, że bozony są umieszczone w potencjale zewnętrznym opisanym funkcją  $V_{3D}(\vec{r})$  i oddziałują dwuciałowo za pośrednictwem potencjału  $U_{3D}(\vec{r})$ .

W praktyce eksperymentalnej jednym ze sposobów uzyskania efektywnie jednowymiarowego układu zimnych atomów jest poddanie układu działaniu silnego potencjału pułapkującego, który ogranicza ruch cząstek w kierunkach prostopadłych do głównej osi ruchu [32, 56–60]. Na przykład atomy można uwięzić w pułapce stromego oscylatora harmonicznego działającej w kierunkach  $y$  i  $z$ , tak, że cząstki mogą się swobodnie poruszać jedynie wzdłuż osi  $x$ . Potencjał zewnętrzny  $V_{3D}(\vec{r})$  można w takim przypadku zapisać następująco:

$$V_{3D}(\vec{r}) = V(x) + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2), \quad (2.2)$$

gdzie  $V(x)$  jest dowolnie wybranym potencjałem jednowymiarowym. Zakładamy, że częstotliwość  $\omega_\perp$  jest na tyle wysoka, że energia wzbudzenia  $\hbar\omega_\perp$  jest znacznie większa niż energie cząstek. Wówczas dynamika każdej z cząstek w kierunkach poprzecznych jest ograniczona do stanu podstawowego oscylatora harmonicznego  $\phi_0(y, z) = (m\omega_\perp/\pi\hbar)^{1/4} \exp[-(m\omega_\perp/2\hbar)(y^2 + z^2)]$ . Funkcję falową układu,  $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ , można zapisać w tej sytuacji jako

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \Psi(x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^N \phi_0(y_i, z_i). \quad (2.3)$$

Co za tym idzie, stopnie swobody  $y, z$  można łatwo odseparować i opisywać stan układu funkcją falową  $\Psi(x_1, \dots, x_N)$ .

Przejdźmy teraz do potencjału oddziaływań międzycząstkowych. Dla układów ultrazimnych atomów rozpraszanie cząstek można w przybliżeniu opisać przez oddziaływania kontaktowe. W trzech wymiarach można je opisać przez pseudopotencjał Lee-Huanga-Yanga  $U_{3D}(\vec{r}) = g_{3D}\delta^{(3)}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot)$ , gdzie  $g_{3D}$  to siła oddziaływań, proporcjonalna do długości rozpraszania cząstek [61]. Po ograniczeniu układu do jednego wymiaru potencjał  $U_{3D}(\vec{r})$  przechodzi w efektywnie jednowymiarowy potencjał oddziaływań  $U_{1D}(r)$  o postaci

$$U_{1D}(r) = g\delta(r), \quad (2.4)$$

gdzie  $g$  jest efektywną siłą oddziaływań w jednym wymiarze, zależną od  $g_{3D}$  i  $\omega_\perp$  [62]. Wartość  $g$  można regulować doświadczalnie, np. modyfikując długość rozpraszania za pomocą zewnętrznych pól magnetycznych (tzw. metoda rezonansu Feshbacha) [33, 34] bądź regulując częstotliwość  $\omega_\perp$  pułapki w kierunku poprzecznym [62, 63]. Dla  $g > 0$  oddziaływania są odpychające, dla  $g < 0$  są przyciągające.

Ostatecznie, efektywnie jednowymiarowy układ  $N$  ultrazimnych bozonów opisać można następującym hamiltonianem:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_i) \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N g\delta(x_i - x_j). \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Postać potencjału zewnętrznego

W tej rozprawie rozważamy tunelowanie cząstek ze studni potencjału do pustej przestrzeni (obszaru o zerowym potencjale zewnętrznym). Co za tym idzie, odpowiedni wybór kształtu potencjału zewnętrznego  $V(x)$  ma fundamentalne znaczenie dla naszego modelu. Dla ustalenia uwagi założmy, że przed rozpoczęciem symulacji (tj. dla czasów  $t < 0$ ) cząstki uwięzione są w studni potencjału oscylatora harmonicznego o częstotliwości  $\Omega$ , tzn. potencjał zewnętrzny dla  $t < 0$  ma postać

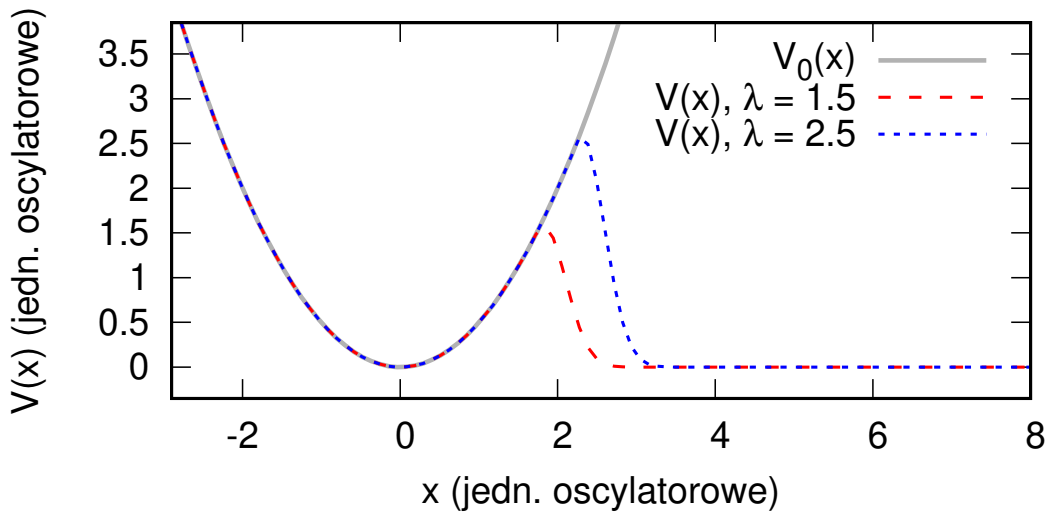
$$V_0(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2x^2. \quad (2.6)$$

Zakładamy, że stan początkowy układu  $\Psi(x_1, \dots, x_N; t = 0)$  będzie identyczny ze stanem podstawowym  $N$  oddziaływających cząstek w potencjale oscylatora harmonicznego  $V_0(x)$ .

Następnie, w chwili  $t = 0$ , studnia zostaje nagle otwarta, tak, że potencjał zewnętrzny dla czasu  $t \geq 0$  jest opisany następującą funkcją:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\Omega^2x^2, & x < \sqrt{2\lambda}x_0, \\ \frac{1}{2}m\Omega^2x^2 e^{-6(x/x_0 - \sqrt{2\lambda})^2}, & x \geq \sqrt{2\lambda}x_0, \end{cases} \quad (2.7)$$





**Rysunek 2:** Kształt potencjału zewnętrznego dla czasu  $t < 0$  ( $V_0(x)$ , szara linia ciągła) i po nagłej zmianie w chwili  $t = 0$  ( $V(x)$ , czerwona i niebieska linia przerywana), dla dwóch różnych wartości parametru  $\lambda = 1.5, 2.5$ . Energia i długość podane są odpowiednio w jednostkach  $\hbar\Omega$  i  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

gdzie  $x_0 = \sqrt{\hbar/m\Omega}$  jest oscylatorową jednostką długości. Funkcja  $V(x)$  ma kształt studni oddzielonej od otwartej przestrzeni barierą o skończonej wysokości<sup>1</sup>. Potencjał ten jest sparametryzowany przez bezwymiarowy parametr  $\lambda$ , w przybliżeniu równy wysokości bariery w oscylatorowych jednostkach energii  $\hbar\Omega$ . Postać potencjału zewnętrznego  $V(x)$  ukazana została na rys. 2 i porównana z potencjałem oscylatora harmonicznego  $V_0(x)$ . W tej rozprawie wartość parametru  $\lambda$  została tak dobrana, by mieć pewność, że bariera jest wyższa niż energia cząstek. Oznacza to, że cząstki mogą uciec ze studni jedynie na drodze tunelowania przez obszar klasycznie zabroniony. Dla badanego w tym rozdziale układu kilku bozonów przyjmujemy  $\lambda = 1.5$ .

W dalszej części pracy, dla zwięzłości, wszystkie wielkości będziemy wyrażać w jednostkach oscylatorowych, tj. energia wyrażana będzie w jednostkach  $\hbar\Omega$ , długości w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ , zaś siła oddziaływań  $g$  w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ .

### 2.1.3 Przykładowa realizacja eksperymentalna

Choć dalsza część rozprawy skupia się na zagadnieniach czysto teoretycznych, warto przyjrzeć się, jakie są typowe skale długości i czasu w eksperymentalnych układach tego rodzaju. Pozwoli to lepiej odnieść teoretyczne rozważania do rzeczywistości. Za przykład typowej realizacji doświadczalnej posłużyć może, wspomniany już we wstępie, eksperyment w Heidelbergu [36]. W eksperymencie tym przygotowano układ kilku ultrazimnych fermionów w pułapce optycznej mającej wydłużony kształt, tak, że układ był

<sup>1</sup>Należy zaznaczyć, że w moich wcześniejszych publikacjach [64, 65], na których oparto treść tego rozdziału, kształt potencjału zewnętrznego jest nieco inny. Z tego powodu wyniki w tym rozdziale nie są całkowicie identyczne z tymi zaprezentowanymi w pracach [64] i [65]. Pozostają jednak z nimi w pełni zgodne pod względem jakościowym. Nowy wybór potencjału (2.7) został podyktowany troską o spójność oraz czytelność mojej rozprawy (potencjały zewnętrzne rozważane w oryginalnych publikacjach [65] i [64] różniły się nieco od siebie). Tak więc na potrzeby tej rozprawy przyjęto jedną, konsekwentną postać potencjału zewnętrznego  $V(x)$ .

efektywnie jednowymiarowy (częstotliwość pułapkowania w kierunkach prostopadłych do głównej osi ruchu wynosiła  $\omega_{\perp}$ ). Początkowy efektywny potencjał jednowymiarowy odczuwany przez atomy miał kształt harmonicznego studni o częstotliwości  $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$ , w której przygotowano kilka (od 1 do 6) fermionowych atomów  ${}^6\text{Li}$  w dwóch różnych stanach spinowych. Po przygotowaniu stanu początkowego układ poddano działaniu gradientu pola magnetycznego, skierowanego wzdłuż osi pułapki. W ten sposób zmieniono odczuwany przez atomy potencjał zewnętrzny, nadając mu postać dość zbliżoną do używanego w tej rozprawie modelowego potencjału  $V(x)$  (2.7) i umożliwiając fermionom tunelowanie ze studni. Wysokość bariery, przez którą tunelowały fermiony, była (tak, jak zakładam w mojej rozprawie) rzędu naturalnej jednostki energii  $\hbar\omega_{\parallel}$ . Między fermionami o przeciwnych spinach występowały oddziaływania krótkozasięgowe o sile oddziaływań  $g$ , którą w eksperymencie regulowano z wykorzystaniem zjawiska rezonansu Feshbacha. Choć eksperyment wykorzystywał atomy fermionowe, w mojej rozprawie zakładam, że układy bozonowe również mogą być realizowane w podobnych warunkach.

Tabela 2.1 stanowi podsumowanie doświadczalnych parametrów i naturalnych jednostek w tym eksperymencie, dając pojęcie o typowych skalach w ultrazimnych układach tego rodzaju.

masa atomów ${}^6\text{Li}$ , $m$	6.015122 u
temperatura układu, $T$	250 nK
częstość pułapki, $\omega_{\parallel}$	$2\pi \times 1.488$ kHz
częstość pułapkowania w kierunkach prostopadłych, $\omega_{\perp}$	$2\pi \times 14.22$ kHz
temperatura Fermiego w pułapce początkowej, $T_F$	$3 \mu\text{K}$
stosunek częstości, $\omega_{\perp}/\omega_{\parallel}$	$\approx 9.6$
stosunek temperatur, $T/T_F$	$\approx 0.08$
naturalna jednostka długości, $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_{\parallel}}$	$1.063 \mu\text{m}$
naturalna jednostka energii, $\hbar\omega_{\parallel}$	$9.859 \cdot 10^{-31}$ J
naturalna jednostka czasu, $1/\omega_{\parallel}$	$0.1070$ ms
zakres sił oddziaływań $g$ (w jednostkach $x_0\hbar\omega_{\parallel}$ )	$-1.27 \leq g \leq -0.44$

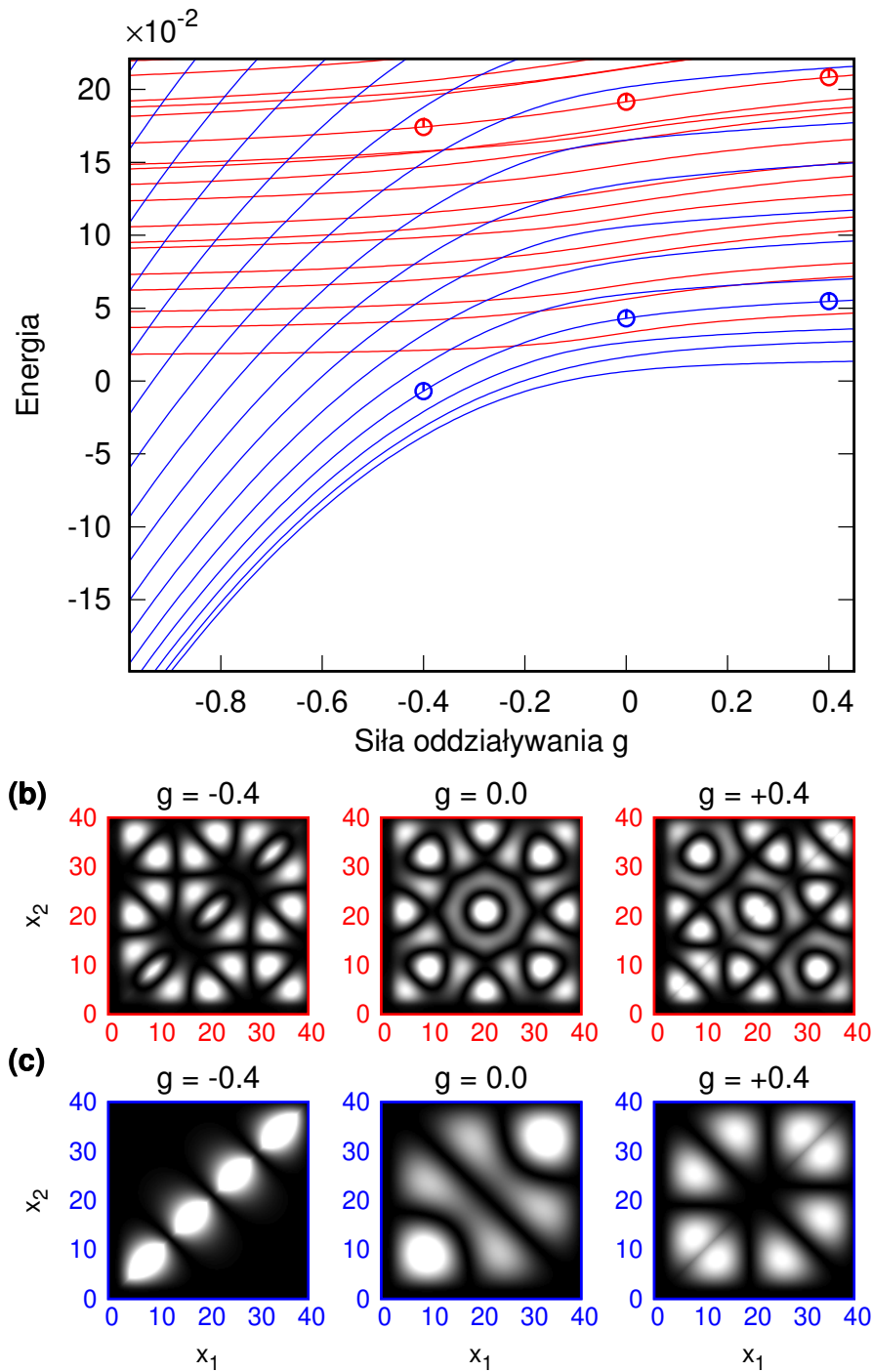
**Tabela 2.1:** Parametry doświadczalne w eksperymencie [36] i odpowiadające im naturalne skale długości, energii i czasu.

## 2.2 Widmo hamiltonianu wielociałowego

Zanim zaczniemy rozważać dynamikę układu opisanego hamiltonianem (2.5), przyjrzyjmy się najpierw widmu jego wielociałowych stanów własnych. Pozwoli nam to uzyskać podstawowe pojęcie o tym, jakie stany mogą tworzyć cząstki po tunelowaniu do otwartej przestrzeni oraz jaki wpływ ma na to siła oddziaływań.

Zacznijmy od przypadku dwóch bozonów. Na rys. 3a przedstawiono energie kolejnych stanów własnych hamiltonianu (2.5) w zależności od siły oddziaływań  $g$ , obliczone dla  $N = 2$  bozonów w potencjale  $V(x)$  (2.7). Energie te zostały obliczone numerycznie na drodze bezpośredniej diagonalizacji hamiltonianu, przedstawionego w postaci macierzowej (w tym celu wykorzystano bibliotekę ARPACK dla języka Fortran).

Zastanówmy się nad strukturą tego widma. Może nam w tym pomóc porównanie go do widma dobrze znanego modelu Gaudina-Lieba-Linigera [66–68] (po jego adaptacji dla



**Rysunek 3:** (a) Energie własne hamiltonianu wielociałowego (2.5) dla  $N = 2$  bozonów, w zależności od siły oddziaływań kontaktowych  $g$ . Stany własne można podzielić na dwie grupy: stany, które opisują parę prawie niezależnych cząstek dla wszystkich  $g$  (ich energie oznaczono na czerwono), i stany, które dla  $g > 0$  opisują dwie niezależne cząstki, ale dla  $g < 0$  opisują związane pary bozonów z energią silnie zależną od  $g$  (na niebiesko). Okrągłe symbole wskazują energie stanów własnych, których rozkład gęstości dla różnych  $g$  przedstawiono na wykresach (b) i (c). (b) Gęstość dwuciałowa  $\rho_2(x_1, x_2)$  dla jednego ze stanów własnych z pierwszej grupy, w zależności od siły oddziaływań  $g$ . (c) Gęstość dwuciałowa  $\rho_2(x_1, x_2)$  dla jednego ze stanów własnych z drugiej grupy, w zależności od siły oddziaływań  $g$ . Obliczeń dokonano dla układu ograniczonego do obszaru  $x \in [-4, 40]$ . Energie podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ . (Oparto na rys. 3 z [65].)

przypadku  $N = 2$ ). Model ten opisuje jednowymiarowy układ  $N$  ultrazimnych bozonów w pustej przestrzeni i może być stosowany z powodzeniem dla ultrazimnych układów różnego rodzaju [69–74]. Właściwości widma jego hamiltonianu są dobrze znane [75, 76]. Oczywiście badany przez nas układ jest nieco inny od oryginalnego modelu, ponieważ potencjał zewnętrzny nie jest stały w całej przestrzeni i rośnie bez ograniczeń dla  $x < 0$ . Widma stanów własnych obu hamiltonianów są jednak podobne, a stany własne i ich energie zachowują się w obu przypadkach w zbliżony sposób. W szczególności wszystkie stany własne naszego hamiltonianu da się podzielić na dwie grupy.

Pierwsza grupa składa się ze stanów opisujących dwa niemal niezależne bozony o pędach  $k_1, k_2$ , tj. całkowita energia każdego z tych stanów wynosi w przybliżeniu  $E \approx k_1^2/2 + k_2^2/2$ . Ponieważ energie te są niemal niezależne od siły oddziaływań  $g$ , stany te widać na wykresie jako niemal poziome linie (oznaczone na czerwono).

Druga grupa składa się ze stanów, które dla oddziaływań przyciągających opisują związaną parę bozonów. Oznacza to, że dla  $g < 0$  całkowita energia danego stanu zależy silnie od siły oddziaływań. Przez analogię do modelu Lieba-Linigera energia ta wynosi w przybliżeniu  $E \approx K^2/4 - g^2/4$ , gdzie  $K$  jest pędem środka masy pary [76]. Z kolei dla oddziaływań odpychających ( $g > 0$ ) stany te mają podobne właściwości, co stany z pierwszej grupy, a ich energia jest niemal niezależna od oddziaływań. Tak więc na rys. 3a stany te widać jako charakterystyczne linie (oznaczone na niebiesko), które dla oddziaływań przyciągających mają postać paraboliczną, a dla oddziaływań odpychających przechodzą w niemal poziome linie.

Aby przekonać się, że stany te rzeczywiście można opisać w ten sposób, możemy im się przyjrzeć z punktu widzenia rozkładu cząstek w przestrzeni. W tym celu posługujemy się rozkładem gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2) = |\Psi(x_1, x_2)|^2$ , oznaczającym prawdopodobieństwo jednoczesnego znalezienia dwóch bozonów na pozycjach  $x_1$  i  $x_2$  dla stanu opisanego funkcją falową  $\Psi(x_1, x_2)$ . Na rys. 3b,c przedstawiono rozkład  $\rho_2(x_1, x_2)$  dla przykładowego stanu z grupy pierwszej i grupy drugiej dla różnych wartości  $g$  (energie tych stanów dla danych  $g$  zaznaczono symbolami na rys. 3a). Dla  $g = 0.0$  dwuciałowe funkcje falowe obu tych stanów stanowią w przybliżeniu złożenie dwóch periodycznych funkcji  $\Psi(x_1, x_2) \approx \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2)$ , mają więc bardzo zbliżoną naturę do funkcji falowych cząstek swobodnych. W przypadku stanu z grupy pierwszej (rys. 3b), dla  $g$  różnych od zera wygląd funkcji falowej zmienia się w pobliżu diagonal  $x_1 = x_2$ , ale w przybliżeniu zachowuje naturę swobodnych cząstek. Inaczej jest dla stanu z grupy drugiej (rys. 3c): dla  $g < 0$  jego struktura przestrzenna znacznie się zmienia – dwuciałowa funkcja falowa obu bozonów przybiera postać związanej pary, tj. gęstość jest skupiona blisko diagonal  $x_1 = x_2$ . Świadczy to, że stany z grupy pierwszej i drugiej rzeczywiście opisują, odpowiednio, stany swobodnych i związanych w pary bozonów.

W podobny sposób opisać można widmo hamiltonianu dla układu  $N = 3$  bozonów. W tym przypadku, przez analogię do modelu Gaudina-Lieba-Linigera (po jego adaptacji do przypadku  $N = 3$ ), wielociałowe stany własne podzielić można na trzy grupy [76]. W skład pierwszej grupy wchodzi stany trzech niezależnych cząstek o energii niezależnej od oddziaływań,  $E \approx k_1^2/2 + k_2^2/2 + k_3^2/2$ . Druga grupa zawiera stany, które dla  $g < 0$  składają się ze związanej pary cząstek i trzeciej, niezależnej cząstki. Odpowiadająca takiej konfiguracji energia własna może być zapisana jako  $E \approx K^2/4 - g^2/4 + k_3^2/2$ , gdzie  $K$  oznacza energię środka masy pary. W końcu grupa trzecia zawiera stany, które dla  $g < 0$  opisują związane trimery o energii  $E \approx P^2/6 - g^2$ , gdzie  $P$  to pęd środka masy trimery.

Ewolucja stanu układu, przygotowanego jako stan podstawowy zamkniętego układu, zależy od jego bezpośredniego rozkładu na wielociałowe stany własne hamiltonianu po

otwarciu studni. Z naszego opisu widma hamiltonianu wyłania się następujący obraz: dla siły oddziaływań  $g \geq 0$  cząstki nie mogą tworzyć żadnych stanów związanych i mogą tunelować ze studni wyłącznie pojedynczo. Dla  $g < 0$  pojawia się możliwość, że cząstki będą opuszczać studnię w postaci związanych par albo trimerów (bądź, w przypadku  $N > 3$ , jeszcze większych grup). Możemy zatem przewidzieć, że dla  $g < 0$  w dynamice układu będzie uczestniczyło kilka odrębnych procesów tunelowania.

Samo widmo energii własnych nie dostarcza oczywiście bezpośrednio informacji o tym, który z mechanizmów tunelowania będzie dominował w dynamice. W tym celu należałoby rozłożyć stan początkowy na stany własne hamiltonianu i w ten sposób ustalić względny udział stanów danego rodzaju. Niestety, ze względu na złożoność numeryczną, wspomnianego rozkładu nie można dokonać wydajnie i dokładnie. Dlatego do odpowiedzi na pytanie o udział różnych procesów tunelowania trzeba zastosować inne podejście. W tym celu przeprowadzimy bezpośrednią analizę ewolucji stanu układu w czasie, rozwiązując wprost wielociałowe równanie Schrödingera:

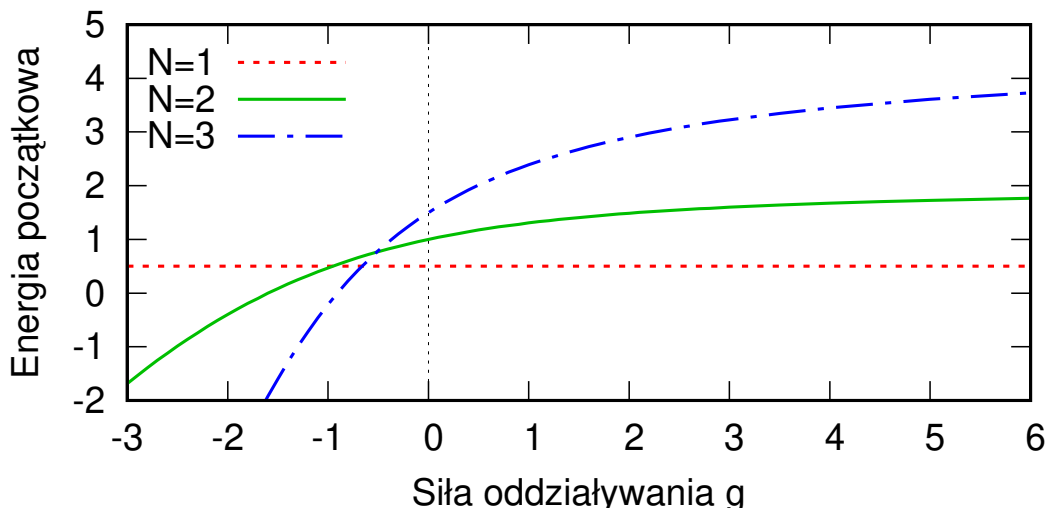
$$i \frac{d}{dt} \Psi(x_1, \dots, x_N; t) = H \Psi(x_1, \dots, x_N; t). \quad (2.8)$$

Równanie (2.8) rozwiązywane jest numerycznie w reprezentacji położeniowej, używając metody Rungego-Kutty czwartego rzędu, z odpowiednio małym krokiem czasowym  $\delta t = 0.005$ . Obliczenia dokonywane są na gęstej siatce punktów położonych w równych odstępach  $\delta x$  (przy czym  $\delta x = 0.25$  dla przypadku dwóch cząstek,  $\delta x = 0.33$  dla przypadku trzech cząstek). Wielkość symulowanego obszaru przyjęta została jako  $x \in [-4, 300]$  (dla przypadku dwóch cząstek) lub jako  $x \in [-4, 120]$  (dla przypadku trzech cząstek), tak, że uwzględniony został duży odcinek przestrzeni w obszarze poza studnią. Sprawdzone przy tym, że wyniki obliczeń numerycznych pozostają praktycznie bez zmian przy modyfikacji rozmiaru symulowanego obszaru lub przy zastosowaniu gęstszej siatki ( $\delta x = 0.125$ ).

## 2.3 Stan początkowy układu

Oczywiście, aby otrzymać stan układu w chwili  $t > 0$ , musimy znać jego stan w chwili początkowej  $t = 0$ . Jak już wspomniano, w rozprawie zakładam, że w chwili początkowej układ znajduje się w stanie podstawowym  $N$  bozonów umieszczonych w potencjale oscylatora harmonicznego, oddziałujących potencjałem kontaktowym  $g\delta(r)$ . Dla  $N = 2$  odpowiedni stan podstawowy można znaleźć analitycznie dla dowolnego  $g$  [77], ale dla  $N > 2$  rozwiązanie analityczne nie jest dostępne. Z tego powodu w tej pracy znajdujemy stan podstawowy układu numerycznie, wykorzystując metodę propagacji funkcji próbnej w czasie urojonym. Jest to standardowa metoda znajdowania stanu podstawowego danego hamiltonianu i wymaga ona jedynie rozwiązania równania Schrödingera (2.8) po zamianie  $t \rightarrow -i\tau$ . Dla układu dwóch bozonów energie otrzymane tą metodą zgadzają się bardzo dobrze z wynikami analitycznymi z pracy [77].

Na rys. 4 ukazano energię stanu podstawowego  $E_N(g)$  dla układu  $N = 1, 2, 3$  bozonów, w zależności od siły oddziaływań  $g$ . Dla  $N = 1$  energia ta jest oczywiście niezależna od  $g$  i równa jest energii najniższego stanu własnego oscylatora harmonicznego,  $E_1 = 1/2$ . Dla  $N > 1$  energia stanu podstawowego rośnie monotonicznie wraz z  $g$  (dla  $g \rightarrow -\infty$  energia spada bez ograniczeń). Oczywiście po otwarciu studni potencjał zewnętrzny odczuwany przez cząstki ulega zmianie, w związku z czym energia układu dla  $t \geq 0$  nie będzie dokładnie równa energii dla  $t < 0$ . Jednak zmiana ta jest nieznaczna, gdyż potencjał w obszarze zajmowanym przez cząstki w stanie początkowym pozostaje prawie niezmienny.

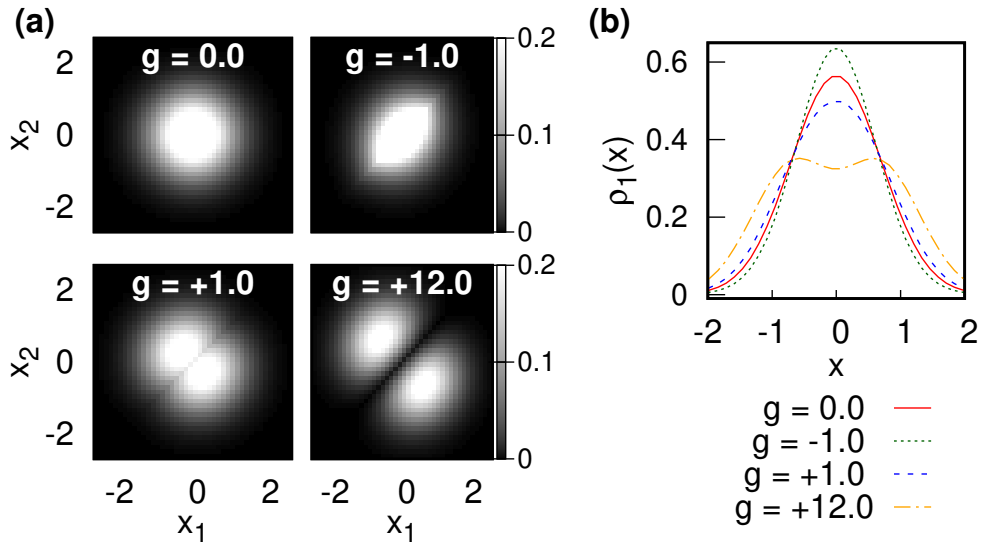


**Rysunek 4:** Energia stanu podstawowego  $N$  bozonów w pułapce harmoniczej dla różnych wartości siły oddziaływań kontaktowych  $g$ . Energię podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ .

Istnieją dwa przypadki graniczne, w których energia jest bardzo prosta do obliczenia. Pierwszym z nich jest przypadek układu nieoddziałującego ( $g = 0$ ). W tym przypadku każdy z  $N$  bozonów jest w stanie podstawowym oscylatora harmonicznego, a więc  $E_N(0) = N/2$ . Drugim przypadkiem jest granica nieskończonych odpychań  $g \rightarrow +\infty$ , tzw. granica Tonks-Girardeau [78]. W tej granicy na bozonową funkcję falową nałożony jest warunek podobny do fermionowego zakazu Pauliego, tj. dwa bozony nie mogą przebywać w tym samym miejscu. Bozony ulegają przez to tzw. fermionizacji, tj. pewne wielkości fizyczne układu mają takie same wartości, co w analogicznym układzie  $N$  identycznych, nieoddziałujących fermionów. Energia stanu podstawowego w tym wypadku będzie taka sama, jak dla fermionów, a więc będzie sumą energii  $N$  najniższych stanów własnych oscylatora harmonicznego:  $E_N(+\infty) = \sum_{n=1}^N (n - 1/2) = N^2/2$ .

Przyjrzyjmy się teraz, jak będzie wyglądał otrzymany stan podstawowy pod względem rozkładu cząstek w przestrzeni, na przykładzie układu dwuciałowego. W tym celu wykorzystamy rozkład gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2) = |\Psi(x_1, x_2)|^2$ , wyrażający prawdopodobieństwo jednoczesnego znalezienia dwóch bozonów na pozycjach  $x_1$  i  $x_2$ , oraz rozkład gęstości jednociłowej  $\rho_1(x) = \int dx_2 |\Psi(x, x_2)|^2$ , wyrażający prawdopodobieństwo znalezienia bozonu w punkcie  $x$ . Na rys. 5 ukazano rozkłady gęstości stanu podstawowego  $N = 2$  bozonów dla kilku przykładowych wartości  $g$ : braku oddziaływań ( $g = 0$ ), oddziaływań przyciągających ( $g = -1$ ) oraz oddziaływań odpychających ( $g = +1$ ,  $g = +12$ ).

Dla przypadku  $g = 0$  oba bozony zajmują najniższy stan własny oscylatora harmonicznego. Rozkłady gęstości mają zatem kształt gaussowski:  $\rho_2(x_1, x_2) \sim e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$  oraz  $\rho_1(x) \sim e^{-x^2}$ . W tym przypadku gęstość dwuciałowa nie wykazuje żadnych korelacji międzyciałowych – wykrycie bozonu w jednym miejscu nie dostarcza żadnej dodatkowej informacji o tym, gdzie znajdziemy drugi bozon. Położenia bozonów stają się skorelowane dopiero dla niezerowych oddziaływań. Dla układu z oddziaływaniami odpychającymi prawdopodobieństwo znalezienia dwóch bozonów blisko siebie jest mniejsze (zmniejsza się gęstość dwuciałowa  $\rho_2$  w pobliżu linii  $x_1 = x_2$ ). Zarazem rozkład jednociłowy  $\rho_1$  staje się szerszy, a znalezienie bozonu staje się mniej prawdopodobne blisko centralnego punktu



**Rysunek 5:** (a) Rozkład gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2)$  stanu podstawowego układu  $N = 2$  bozonów dla różnych wartości siły oddziaływań kontaktowych  $g$ : brak oddziaływań ( $g = 0$ ), oddziaływania przyciągające ( $g = -1$ ) lub odpychające ( $g = +1, g = +12$ ). Wraz ze zmianą siły oddziaływań wzrasta lub spada prawdopodobieństwo znalezienia bozonów blisko siebie, wyrażone przez gęstość w pobliżu diagonal  $x_1 = x_2$ . (b) Rozkład gęstości jednociałowej  $\rho_1(x)$  stanu podstawowego dla różnych wartości  $g$ . Zmiana siły oddziaływań wpływa na szerokość profilu funkcji falowej oraz prawdopodobieństwo znalezienia bozonu w środku pułapki. Położenie podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ . (Oparto na rys. 2 z [65].)

pułapki. Dla szczególnie silnych oddziaływań odpychających ( $g = +12$ ) centralne maksimum w rozkładzie jednociałowym  $\rho_1$  rozdziela się na dwa maksima. Dla oddziaływań przyciągających zachodzą efekty odwrotne. Gęstość dwuciałowa jest w tym przypadku silniej skupiona wzdłuż linii  $x_1 = x_2$ , a z rozkładu gęstości jednociałowej widać, że bozony są skupione bliżej centrum pułapki.

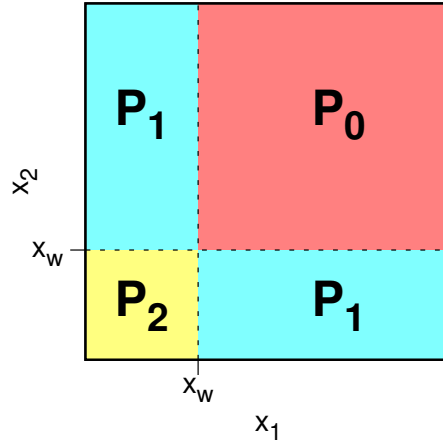
## 2.4 Dynamika po otwarciu studni

### 2.4.1 Dynamika dwóch bozonów

Po tym, jak studnia zostaje otwarta w chwili  $t = 0$ , cząstki zaczynają tunelować ze studni do otwartej przestrzeni. Zbadajmy teraz dynamikę układu, skupiając się najpierw na najprostszym przypadku  $N = 2$  bozonów.

#### Ewolucja gęstości prawdopodobieństwa

Naturalnymi wielkościami charakteryzującymi ewolucję układu są prawdopodobieństwa  $\mathcal{P}_n(t)$ , że w danej chwili  $t$  znajdziemy w studni dokładnie  $n$  cząstek ( $0 \leq n \leq 2$ ). Wielkości  $\mathcal{P}_n(t)$  są możliwe do zmierzenia doświadczalnego [36, 40]. Dla dwóch cząstek będziemy mieli do czynienia z trzema prawdopodobieństwami:  $\mathcal{P}_2(t), \mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_0(t)$ . Każde z tych prawdopodobieństw jest bezpośrednio zakodowane w profilu gęstości



**Rysunek 6:** Przestrzeń konfiguracyjna w bazie położeniowej dla układu  $N = 2$  cząstek, podzielona na obszary:  $P_2$  (obejmujący konfiguracje z dwoma cząstkami w studni),  $P_1$  (jedna cząstka w studni) i  $P_0$  (brak cząstek w studni). Symbole  $x_1$  i  $x_2$  oznaczają pozycje obu bozonów. Podział ten zdefiniowany jest przez położenie granicy studni,  $x_w$ . Położenie podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

$\rho_2(x_1, x_2; t) = |\Psi(x_1, x_2; t)|^2$  jako odpowiednia całka:

$$\mathcal{P}_n(t) = \int_{P_n} dx_1 dx_2 \rho_2(x_1, x_2; t), \quad (2.9)$$

gdzie obszary całkowania  $P_n$  zdefiniowane są następująco:

$$P_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq x_w \wedge x_2 \leq x_w\}, \quad (2.10)$$

$$P_1 = \{(x_1, x_2) : (x_1 > x_w \wedge x_2 \leq x_w) \vee (x_1 \leq x_w \wedge x_2 > x_w)\}, \quad (2.11)$$

$$P_0 = \{(x_1, x_2) : x_1 > x_w \wedge x_2 > x_w\}, \quad (2.12)$$

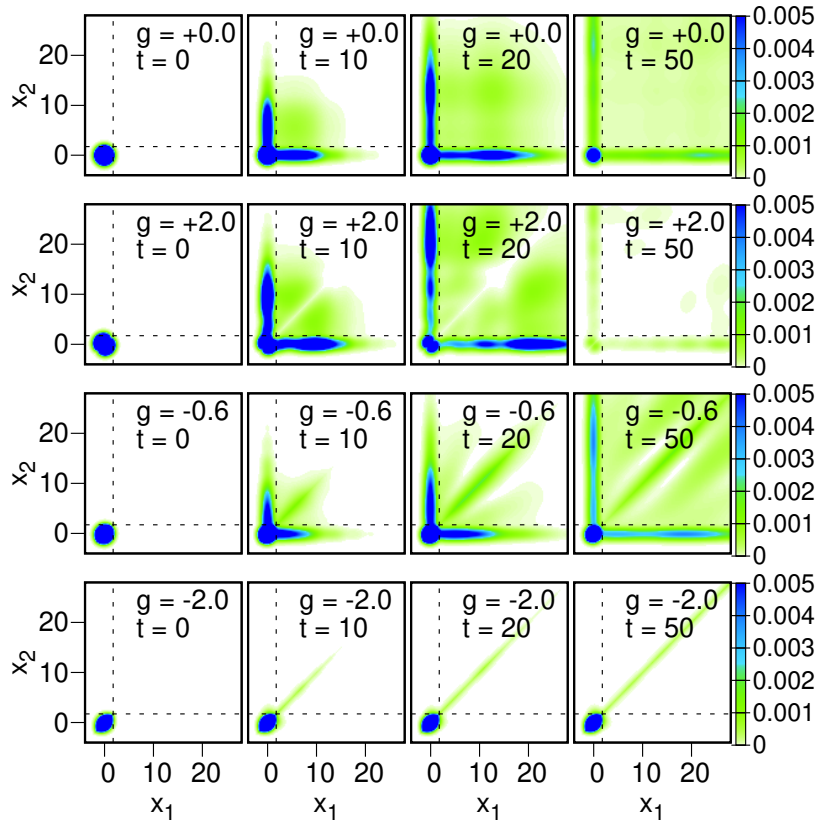
przy czym granicę studni  $x_w$  przyjmujemy jako  $x_w = \sqrt{2\lambda}$  (w zależności od parametru  $\lambda$  regulującego wysokość bariery). Podział ten przedstawiono w postaci graficznej na rys. 6. Dla układów o  $N > 2$  cząstkach podział przestrzeni na obszary  $P_n$  będzie analogiczny (aczkolwiek trudny do graficznej wizualizacji).

Dla każdego  $t$  spełniona jest oczywiście relacja  $\sum_n \mathcal{P}_n(t) = 1$ . W chwili początkowej  $t = 0$  mamy  $\mathcal{P}_2(0) \approx 1$  oraz  $\mathcal{P}_{n < N}(0) \approx 0$ . Dla dostatecznie długich czasów  $t \rightarrow \infty$  studnia ulegnie całkowitemu opróżnieniu, a zatem  $\mathcal{P}_0(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$ .

Zanim przeanalizujemy ewolucję  $\mathcal{P}_n(t)$ , przyjrzyjmy się najpierw dynamice układu poprzez bezpośrednią analizę ewolucji dwuciałowego profilu gęstości  $\rho_2(x_1, x_2; t) = |\Psi(x_1, x_2; t)|^2$ . Na rys. 7 ukazano  $\rho_2(x_1, x_2; t)$  dla układu dwóch bozonów dla różnych wartości siły oddziaływań  $g$ , w różnych chwilach czasu  $t$  po otwarciu studni. Dla lepszej widoczności liniami przerywanymi zaznaczono granicę studni  $x_w = \sqrt{2\lambda} = \sqrt{3}$ , która dzieli całą przestrzeń konfiguracyjną na trzy obszary  $P_2, P_1, P_0$ . W chwili początkowej ( $t = 0$ ) cała wielociałowa funkcja falowa zawarta jest w obszarze  $P_2$ .

Dla układu dwóch bozonów w pułapce możliwe są dwa różne mechanizmy ucieczki cząstek: bozony mogą tunelować sekwencyjnie (jeden za drugim) bądź też tunelować jednocześnie jako związana para. W przypadku układu nieoddziałującego ( $g = 0$ , górny

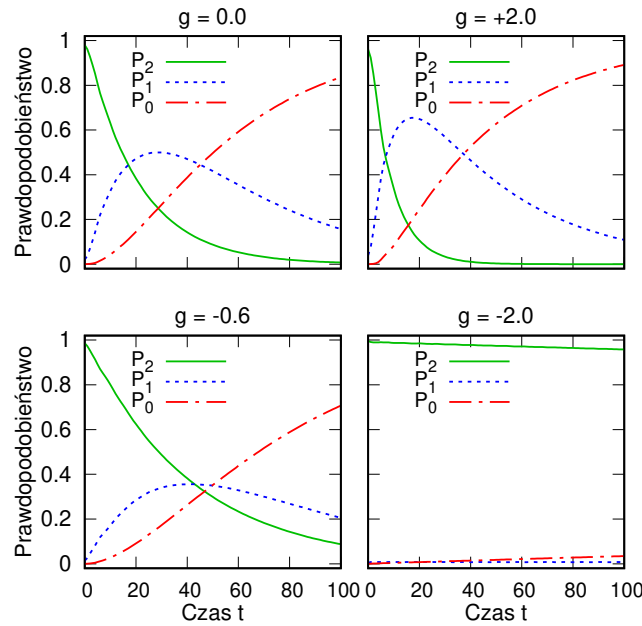




**Rysunek 7:** Ewolucja w czasie rozkładu gęstości  $\rho_2(x_1, x_2, t)$  dla układu dwóch bozonów o różnych wartościach siły oddziaływań kontaktowych  $g$ . Linie kreskowane oznaczają granicę studni  $x_w = \sqrt{3}$  i dzielą przestrzeń konfiguracyjną na trzy różne obszary  $P_i$  (jak pokazano na rys. 6 ze str. 14). Dla układów nieoddziałujących ( $g = 0$ ) i odpychających ( $g = 2$ ) zachodzi tylko tunelowanie sekwencyjne. Dla układu z oddziaływaniami przyciągającymi ( $g = -0.6$ ) pojawia się także tunelowanie par, a dla dostatecznie silnych przyciągań ( $g = -2$ ) zachodzi praktycznie tylko tunelowanie par. Odległości podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ . (Oparto na rys. 2 z [64].)

rząd na rys. 7) oba bozony tunelują całkowicie niezależnie. Duża część gęstości prawdopodobieństwa przepływa przy tym z obszaru  $P_2$  do  $P_1$ . Jest to oznaka tunelowania sekwencyjnego: jeden z bozonów opuścił studnię, podczas gdy drugi wciąż w niej pozostaje. Pewna część gęstości skupiona jest także w obszarze  $P_0$ , odpowiadającym sytuacji, gdy studnię opuściły oba bozony. Ze względu na brak oddziaływań gęstość dwuciałowa nie wykazuje żadnych korelacji między bozonami, a dwuciałowa funkcja falowa jest po prostu iloczynem dwóch identycznych jednociałowych funkcji falowych.

Dla oddziaływań odpychających ( $g = 2$ ) nasila się tunelowanie sekwencyjne. Gęstość prawdopodobieństwa przepływa najpierw z  $P_2$  do obszaru  $P_1$ , po czym płynie z obszarów o większej gęstości w  $P_1$  do  $P_0$ . Odpowiada to ucieczce drugiego bozonu ze studni po tym, jak pierwszy już opuścił studnię. Zauważyć można także, że gęstość w pobliżu diagonal  $x_1 = x_2$  w regionie  $P_0$  jest bliska zeru. Oznacza to, że bozony przebywają z dala od siebie, a tunelowanie par (bozonów o zbliżonych położeniach) jest stłumione. Jest to oczywiście spodziewane, gdyż podczas omawiania widma hamiltonianu wielociałowego w podrozdziale 2.2 ustaliliśmy, że stany związanych par bozonowych nie są dostępne dla



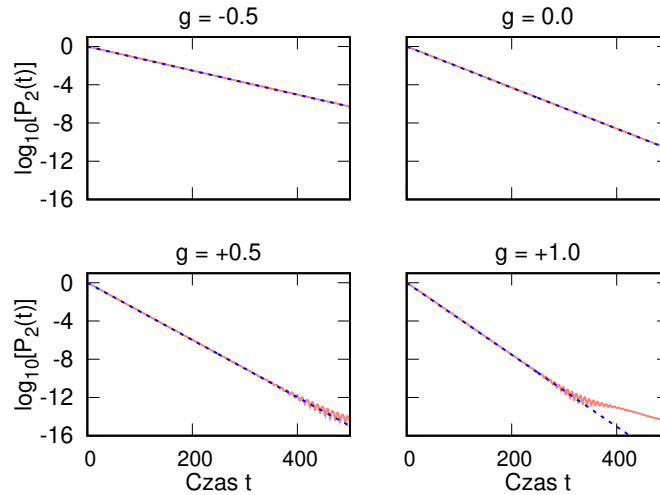
**Rysunek 8:** Ewolucja w czasie prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n(t)$  znalezienia dokładnie  $n$  cząstek w studni, dla układu dwubozonego o różnej sile oddziaływań kontaktowych  $g$ . Dla przypadków  $g = 0, g = 2$  i  $g = -0.6$  ewolucją rządzi głównie dwuetapowy proces tunelowania sekwencyjnego, w którym prawdopodobieństwo płynie jak  $\mathcal{P}_2(t) \rightarrow \mathcal{P}_1(t) \rightarrow \mathcal{P}_0(t)$ . Dla układu silnie przyciągającego ( $g = -2$ ) oba bozony tunelują wyłącznie jednocześnie, tak, że prawdopodobieństwo płynie bezpośrednio z  $\mathcal{P}_2(t)$  do  $\mathcal{P}_0(t)$ . Czas podano w jednostkach  $1/\Omega$ , siłę oddziaływań  $g$  w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega/m}$ . (Oparto na rys. 3 z [64].)

$g > 0$ .

Sytuacja jest zupełnie inna dla układu z oddziaływaniami przyciągającymi. Dla przedstawionego przypadku niewielkich przyciągań ( $g = -0.6$ ) obok tunelowania sekwencyjnego pojawia się też tunelowanie par: gęstość przepływa z  $P_2$  bezpośrednio do obszaru  $P_0$  i pozostaje skupiona wzdłuż diagonalii  $x_1 = x_2$ , co odpowiada bozonom podróżującym razem jako związana para. Po dalszym zwiększeniu siły oddziaływań przyciągających ( $g = -2.0$ ) dynamika układu diametralnie się zmienia. W tym przypadku jedynym obecnym mechanizmem tunelowania jest tunelowanie par, a tunelowanie sekwencyjne praktycznie nie występuje. Świadczy o tym fakt, że gęstość prawdopodobieństwa w obszarze  $P_1$  jest praktycznie zerowa.

Teraz przyjrzyjmy się procesowi tunelowania w sposób bardziej ilościowy. Na rys. 8 ukazujemy ewolucję w czasie prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n(t)$  dla różnych wartości sił oddziaływań. W przypadku układu nieoddziałującego ( $g = 0$ ) dominującym procesem rozpadu stanu początkowego jest sekwencyjne tunelowanie cząstek, przez co ewolucja prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n(t)$  przypomina dwuetapowy rozpad jądrowy.  $\mathcal{P}_2(t)$  cały czas spada aż do zera,  $\mathcal{P}_1(t)$  z początku rośnie, ale w końcu osiąga maksimum i zaczyna maleć, a  $\mathcal{P}_0(t)$  rośnie przez cały czas trwania procesu.

Dla układu z oddziaływaniami odpychającymi ( $g = 2.0$ ), a także dla układu z oddziaływaniami przyciągającymi o względnie małej sile ( $g = -0.6$ ), ewolucja pozostaje zbliżona do przypadku nieoddziałującego. W przypadku  $g > 0$  dodatnia energia oddziaływania sprawia, że pierwszy tunelujący bozon efektywnie widzi niższą barierę potencjału i tuneluje z większym prawdopodobieństwem. Z tego powodu spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  jest szybszy niż



**Rysunek 9:** Ewolucja w czasie wartości  $\mathcal{P}_2(t)$  (linia ciągła) dla układu dwóch bozonów przy różnych wartościach siły oddziaływań kontaktowych  $g$ , w skali logarytmicznej. Linia przerywaną ukazano dopasowaną wartość funkcji  $e^{-\gamma t}$ . Widać, że zanik  $\mathcal{P}_2(t)$  ma postać wykładniczą i można go scharakteryzować za pomocą konkretnej wartości  $\gamma$ . Widoczne odchylenia od postaci wykładniczej zachodzą dopiero dla długich czasów, kiedy  $\mathcal{P}_2(t)$  ma znikomą wartość. Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ . (Oparto na rys. 4 z [64].)

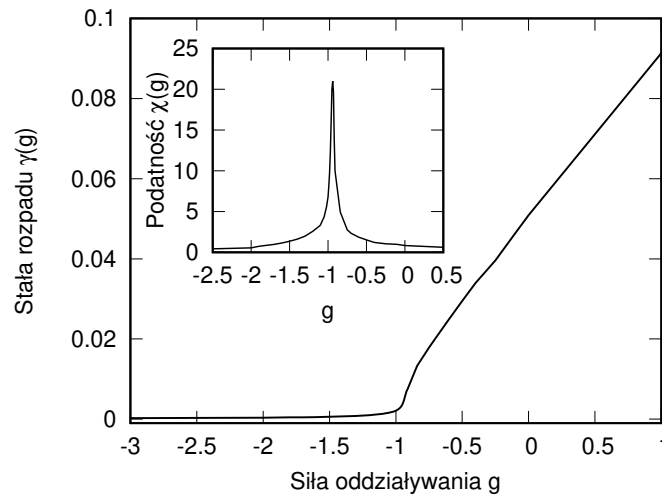
w przypadku nieoddziałującym. Co więcej, pozostawiony w pułapce pojedynczy bozon nie czuje już oddziaływań i tuneluje wolniej, niż pierwszy. W wyniku tego prawdopodobieństwo znalezienia w pułapce dokładnie jednego bozonu wzrasta, a  $\mathcal{P}_1(t)$  osiąga wyższą maksymalną wartość. W przypadku  $g < 0$  z analogicznych powodów spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  jest wolniejszy, a  $\mathcal{P}_1(t)$  osiąga niższą wartość. Jednak dla przedstawionego przypadku  $g = -0.6$  tunelowanie sekwencyjne nadal gra znaczną rolę.

Gdy siła oddziaływań przyciągających jest odpowiednio wysoka ( $g = -2$ ), dynamika zauważalnie się zmienia. W tym przypadku rola dwuetapowego tunelowania sekwencyjnego jest praktycznie zerowa.  $\mathcal{P}_1(t)$  cały czas pozostaje bliskie zera, podczas gdy spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  jest niemal całkowicie odzwierciedlony przez analogiczny wzrost  $\mathcal{P}_0(t)$ . Jednak dla takiej siły oddziaływań spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  jest bardzo powolny w porównaniu z układem nieoddziałującym.

Przekonaliśmy się zatem, że w miarę regulacji siły oddziaływań  $g$ , natura dynamiki tunelowania układu ulega całkowitej zmianie. Choć zmianę tę da się wykryć przez bezpośrednią analizę rozkładu gęstości  $\rho_2$  i zmian liczby cząstek w studni, nasuwa się pytanie, czy da się ją ująć poprzez jedną określoną wielkość fizyczną, zależną tylko od  $g$  i charakteryzującą całą dynamikę tunelowania w sposób niezależny od czasu. Dokonamy tego w następnym podrozdziale.

### Stała rozpadu wykładniczego

Proces tunelowania początkowo uwięzionych cząstek do otwartej przestrzeni można traktować jako rozpad stanu metastabilnego. Wiadomo, że procesy tego rodzaju z bardzo dobrym przybliżeniem podlegają prawu wykładniczego rozpadu [79]. Oznacza to, że prawdopodobieństwo pozostania układu w stanie początkowym,  $\mathcal{P}_S(t) = |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2$ , zanika wykładniczo w czasie. W naszym przypadku (dla układu dwóch cząstek) możemy



**Rysunek 10:** Stała rozpadu  $\gamma(g)$  obliczona z  $\mathcal{P}_2(t)$  dla układu dwóch bozonów oraz jej podatność  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$ , w funkcji siły oddziaływań kontaktowych  $g$ . Dla  $g \approx -0.94$  widać wyraźnie nagłą zmianę zachowania w przebiegu  $\gamma(g)$ , odzwierciedloną także przez obecność ostrego piku w  $\chi(g)$ . Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega}/m$ , stała rozpadu w jednostkach  $\Omega$ , podatność w jednostkach  $\sqrt{m/\hbar^3\Omega}$ . (Oparto na rys. 5 z [64].)

traktować prawdopodobieństwo  $\mathcal{P}_2(t)$  jako bliski odpowiednik  $\mathcal{P}_S(t)$ . Możemy się zatem spodziewać, że ewolucja w czasie tej wielkości będzie dana przez

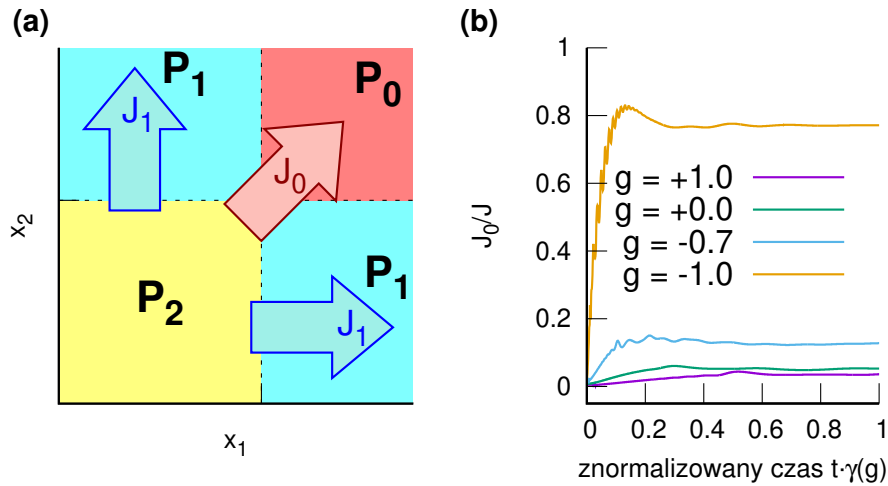
$$\mathcal{P}_2(t) \sim e^{-\gamma t}, \quad (2.13)$$

ze stałą w czasie wartością  $\gamma$ , tj. stałą rozpadu. Aby potwierdzić to przypuszczenie, na rys. 9 ukazujemy ewolucję w czasie wartości  $\mathcal{P}_2(t)$  w długiej skali czasowej dla różnych sił oddziaływań  $g$ . Widać, że niezależnie od  $g$  zanik  $\mathcal{P}_2(t)$  ma postać wykładniczą.

Trzeba zwrócić uwagę, że zarówno dla czasów bardzo krótkich, jak i bardzo długich prawo rozpadu wykładniczego nie jest do końca zachowane. Jest to znany efekt i wynika on z faktu, że w układzie, w którym widmo energii ograniczone jest od dołu, zanik nie może być wykładniczy dla wszystkich czasów  $t$  [80–85]. W rozważanym przez nas przypadku możemy jednak zignorować ten fakt. Początkowy okres niewykładniczego zaniku jest bowiem bardzo krótki w porównaniu ze skalami czasowymi, jakie rozważamy. Z kolei odchylenia od wykładniczego rozpadu dla długich czasów pojawiają się dopiero wtedy, gdy wartość  $\mathcal{P}_2(t)$  jest znikoma, tj. gdy praktycznie cały układ opuścił już studnię. Możemy zatem bez istotnego błędu powiedzieć, że praktycznie cały proces tunelowania zachodzi zgodnie z prawem zaniku wykładniczego. Cały proces tunelowania można więc scharakteryzować przez pojedynczą wielkość  $\gamma$ .

Na drodze eksperymentalnej wartość  $\gamma$  można ustalić, mierząc przebieg  $\mathcal{P}_2(t)$  w czasie i dopasowując do niego funkcję wykładniczą [36]. Także i w naszej symulacji numerycznej możemy w ten sposób znaleźć wartość  $\gamma$  dla dowolnego  $g$ . Dla szczególnie małych wartości  $\gamma$  dokładne znalezienie tej wartości może wymagać ewolucji przez bardzo długi czas (rzędu  $\sim 1000$  obranych jednostek czasowych). Jednak stosując metodę tzw. zespolonego potencjału absorbującego opisaną w dodatku A (str. 63), możemy z powodzeniem symulować zachowanie układu nawet dla tak długich czasów.

Na rys. 10 ukazujemy wartość  $\gamma$  w funkcji  $g$ , a także jej podatność, zdefiniowaną jako pochodna logarytmiczna  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$ . Wartość  $\gamma$  rośnie monotonicznie wraz z  $g$ .



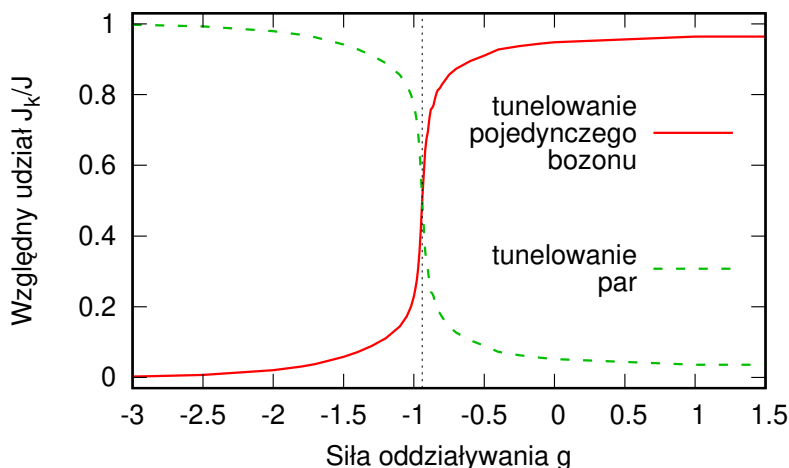
**Rysunek 11:** (a) Schematycznie przedstawienie definicji sumarycznych prądów prawdopodobieństwa  $J_1(t)$  i  $J_0(t)$ , oznaczających, odpowiednio, całkowitą wielkość prądu prawdopodobieństwa płynącego z obszaru  $P_2$  do  $P_1$  (tunelowanie jednociąlowe) i z  $P_2$  do  $P_0$  (tunelowanie par). Symbole  $x_1, x_2$  oznaczają pozycje obu bozonów. (b) Ewolucja w czasie wartości  $J_0(t)/[J_1(t) + J_0(t)]$ , wyrażającej proporcjonalny udział procesu tunelowania par w całkowitym procesie tunelowania układu dwóch bozonów, dla różnych sił oddziaływań kontaktowych  $g$ . Czas wyrażony został w naturalnych jednostkach  $1/\gamma(g)$ , gdzie  $\gamma(g)$  jest stałą rozpadu wyliczoną dla danej siły oddziaływań  $g$ . Widać, że choć na początku ewolucji wielkość  $J_0(t)/[J_1(t) + J_0(t)]$  jest zmienna w czasie, szybko zbiega ona do stałej wartości (zależnej od  $g$ ). Siłę oddziaływań  $g$  podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega/m}$ , a stałą rozpadu w jednostkach  $\Omega$ .

Jest to zgodne z naszymi poprzednimi spostrzeżeniami, gdyż im  $g$  wyższe, tym szybciej następuje tunelowanie bozonów ze stanu początkowego. W okolicy  $g \approx -0.94$  występuje jednak nagle zmiana zachowania stałej rozpadu. Powyżej tego punktu wzrost  $\gamma(g)$  jest znacznie szybszy niż poniżej niego. Towarzyszy temu obecność wyraźnego, ostrego pików w podatności  $\chi$ .

Zachowanie to zgadza się z naszymi poprzednimi wynikami. Jak stwierdzono wcześniej, w granicy silnych przyciągań rozpad układu zachodzi wyłącznie poprzez tunelowanie par, znacznie wolniejsze niż tunelowanie sekwencyjne. Sekwencyjne tunelowanie pojawia się dopiero, kiedy podchodzimy bliżej  $g = 0$ . Sugeruje to, że widoczna na ilustracji jakościowa zmiana w zależności  $\gamma(g)$  od  $g$  wiąże się z aktywacją tunelowania sekwencyjnego.

### Względny udział różnych procesów tunelowania

Najprostszym sposobem na potwierdzenie powyższej hipotezy jest *bezpośrednie* ilościowe określenie, jaki udział w dynamice mają procesy tunelowania sekwencyjnego i tunelowania par. Można tego dokonać na drodze bezpośredniej analizy prądu prawdopodobieństwa wychodzącego z obszaru  $P_2$  dwuciąłowej przestrzeni konfiguracyjnej. Przez  $J_1(t)$  oznaczamy wielkość całkowitego dwuciąłowego prądu prawdopodobieństwa, przepływającego w chwili  $t$  z obszaru  $P_2$  do  $P_1$ . Podobnie przez  $J_0(t)$  oznaczamy całkowitą wielkość prądu prawdopodobieństwa, przepływającego z obszaru  $P_2$  bezpośrednio do  $P_0$  (patrz rys. 11a). Jeśli sumę tych prądów oznaczyć jako  $J(t) = J_1(t) + J_0(t)$ , wówczas wielkości  $J_1(t)/J(t)$  i  $J_0(t)/J(t)$  wyrażają, odpowiednio, proporcjonalny udział tunelowania sekwencyjnego i tunelowania par w całkowitej dynamice układu. Dokładny sposób definicji wielkości



**Rysunek 12:** Stosunki  $J_1/J$  i  $J_0/J$ , wyrażające odpowiednio względny udział tunelowania pojedynczego bozonu i tunelowania par w ogólnej dynamice tunelowania układu dwubozonego, w zależności od siły oddziaływań kontaktowych  $g$ . Daje się wyróżnić dwa odrębne reżimy, odpowiadające dominacji tunelowania pojedynczego bozonu bądź par. Linia kropka-kreska w  $g = -0.94$  odpowiada pozycji pików w  $\chi(g)$  (patrz rys. 10). Jak widać, wartość ta bardzo dobrze pasuje do położenia przejścia między oboma reżimami. Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ . (Oparto na rys. 6 z [64].)

$J(t)$ ,  $J_1(t)$ ,  $J_0(t)$  opisany został w dodatku B (str. 65).

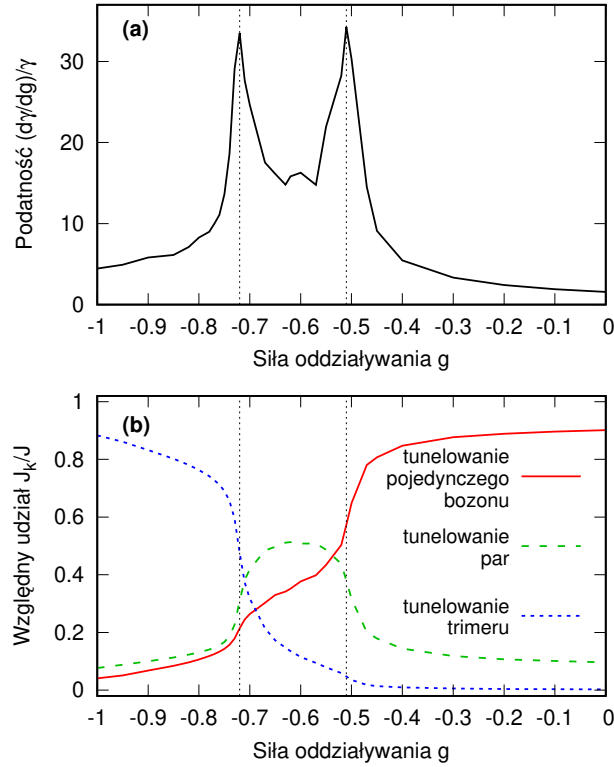
Wielkości  $J_k(t)/J(t)$  są w zasadzie zmienne w czasie. Jednak po względnie krótkim czasie ewolucji (jest to czas rzędu  $1/\gamma(g)$ ) zbiegają one do stałych wartości. Aby to pokazać, na rys. 11b przedstawiamy ewolucję  $J_0(t)/J(t)$  dla różnych wartości  $g$  (czas wyrażono w naturalnych jednostkach czasowych  $1/\gamma(g)$ ). Oznacza to, że możemy traktować  $J_1/J$  oraz  $J_0/J$  jako stałe wartości, zależne tylko od parametrów oddziaływania.

Na rys. 12 przedstawiono wartość  $J_1/J$  oraz  $J_0/J$  w zależności od siły oddziaływań  $g$ . Widać wyraźnie, że dla  $g < -0.94$  proces tunelowania praktycznie w całości jest zdominowany przez tunelowanie par, podczas gdy dla  $g > -0.94$  jest zdominowany przez tunelowanie pojedynczego bozonu. Zatem możemy rozumieć dynamikę układu w kategoriach dwóch odrębnych reżimów, między którymi zachodzi szybkie przejście w okolicach  $g = -0.94$ . Potwierdza to nasze przypuszczenie, że zmiana w zachowaniu stałej rozpadu w punkcie  $g \approx -0.94$  (patrz rys. 10) łączy się z przejściem między reżimami i bardzo prędką aktywacją kanału tunelowania pojedynczego bozonu.

W eksperymentach z tunelowaniem układów kilkubozonego ustalenie dokładnej proporcji tunelowania par może sprawiać znaczne trudności [36]. Jednak nasz wynik pokazuje, że można wykorzystać wartość  $\gamma(g)$ , aby pośrednio wykryć przejście układu między poszczególnymi reżimami tunelowania. Ponieważ wartość  $\gamma(g)$  da się eksperymentalnie ustalić dość łatwo [36], pomiar tej wartości dla różnych  $g$  może dostarczyć informacji o naturze procesu tunelowania.

### 2.4.2 Dynamika trzech bozonów

Zastosujmy teraz analogiczne rozumowanie do przypadku układu trzech bozonów. Tym razem prawdopodobieństwo pozostawania w stanie początkowym jest dane w przybliżeniu przez prawdopodobieństwo znalezienia trzech cząstek w studni,  $\mathcal{P}_3(t)$ . Obliczamy

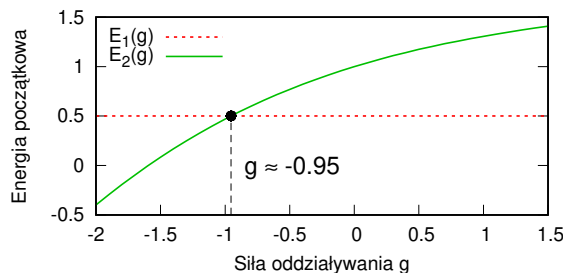


**Rysunek 13:** (a) Podatność  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$  dla stałej rozpadu  $\gamma(g)$  układu trzech bozonów. (b) Stosunki  $J_2/J$ ,  $J_1/J$  i  $J_0/J$  dla różnych wartości  $g$ , wyrażające względny udział trzech procesów rozpadu stanu początkowego: odpowiednio – tunelowania pojedynczej cząstki, dwóch cząstek i trzech cząstek. W układzie można zidentyfikować trzy odrębne reżimy, związane z dominacją tunelowania jedno-, dwu- lub trójcząstkowego. Pionowe linie kreskowane odpowiadają położeniu maksimum w  $\chi(g)$ , które bardzo dobrze pasują do położenia przejść między poszczególnymi reżimami. Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , podatność  $\chi$  w jednostkach  $\sqrt{m/\hbar^3\Omega}$ . (Oparto na rys. 7 z [64].)

$\mathcal{P}_3(t)$  przez całkowanie  $|\Psi(x_1, x_2, x_3; t)|^2$  po obszarze  $\mathbf{P}_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \leq x_w \wedge x_2 \leq x_w \wedge x_3 \leq x_w\}$ . Wartość  $\mathcal{P}_3(t)$  w toku ewolucji zanika wykładniczo, dzięki czemu można znaleźć stałą rozpadu  $\gamma$  przez dopasowanie funkcji wykładniczej do  $\mathcal{P}_3(t)$ .

Istotna różnica w stosunku do przypadku dwóch cząstek polega na tym, że w tym wypadku mamy do czynienia z trzema możliwymi mechanizmami rozpadu. Rozpad stanu początkowego może bowiem nastąpić przez emisję jednego, dwóch, bądź trzech bozonów jednocześnie.

Na rys. 13a ukazana jest podatność stałej rozpadu  $\chi(g)$  jako funkcja  $g$ . W przeciwieństwie do przypadku dwóch bozonów, gdzie w  $\chi(g)$  występował pojedynczy pik, dla układu trzech bozonów widać wyraźnie dwa ostre piki, leżące w okolicach  $g \approx -0.72$  i  $g \approx -0.51$ . Jest rzeczą naturalną skojarzyć te piki (i odpowiadające im zmiany w zachowaniu  $\gamma(g)$ ) ze zmianami w dominujących mechanizmach tunelowania. Oznacza to, że dla układu trzech bozonów powinno dać się wyróżnić *trzy* odrębne reżimy, w przeciwieństwie do dwóch reżimów dla dwóch bozonów. Aby się o tym przekonać, ponownie stosujemy metodę analizy prądów prawdopodobieństwa, by odróżnić od siebie poszczególne mechanizmy tunelowania. Tym razem  $J(t)$  definiujemy jako całkowitą wielkość prądu, wychodzącego w chwili  $t$  z obszaru  $\mathbf{P}_3$ . Analogicznie, jak dla dwóch bozonów,  $J(t)$  daje się rozdzielić



**Rysunek 14:** Energia początkowa  $E_2(g)$  układu dwóch bozonów zależnie od siły oddziaływań kontaktowych  $g$  (ciągła linia zielona) oraz energia  $E_1(g)$  pojedynczej cząstki (czerwona linia kropkowana). Pionowa linia kreskowana wskazuje siłę oddziaływań  $g \approx -0.95$ , powyżej której  $E_2(g) > E_1(g)$ . Energia podana jest w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siła oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ . (Oparto na rys. 8 z [64].)

na części  $J_2(t)$ ,  $J_1(t)$  i  $J_0(t)$ , które kolejno odpowiadają tunelowaniu jednego, dwóch i trzech bozonów. Tak, jak poprzednio, stosunki  $J_k(t)/J(t)$  są praktycznie stałe w czasie i możemy ich użyć do scharakteryzowania udziału różnych mechanizmów tunelowania.

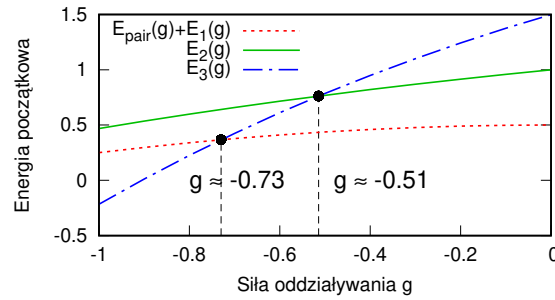
Na rys. 13b ukazujemy wartości  $J_i/J$  dla różnych sił oddziaływań  $g$ . Widać, że mak-  
sima w  $\chi(g)$  pojawiają się w tych samych wartościach  $g$ , co przejścia między trzema  
odrębnymi reżimami. Dla  $g < -0.72$  proces rozpadu zdominowany jest przez tunelowanie  
trimerów. Dla oddziaływań o pośredniej wartości,  $-0.72 < g < -0.51$ , największą rolę  
odgrywa tunelowanie par, choć zarazem widoczny jest zauważalny wkład ze strony tune-  
lowania jedno- i trójcząstkowego. W końcu, dla  $g > -0.51$ , dominującym mechanizmem  
rozpadu jest tunelowanie pojedynczych cząstek. Zauważyć można, że dla oddziaływań  
o pośrednich wartościach dynamika nie jest całkowicie zdominowana przez jeden me-  
chanizm tunelowania, ale wykazuje zauważalny wkład od wszystkich trzech możliwych  
mechanizmów. Jest to wyraźna różnica w porównaniu z układem dwóch bozonów, w  
którym niezależnie od oddziaływań występuje całkowita dominacja tylko jednego procesu  
tunelowania. Dodajmy, że nie da się stwierdzić tego faktu przez analizę ewolucji samej  
wielkości  $\mathcal{P}_3(t)$ . Staje się on widoczny tylko przy rozważaniu dynamiki w kategoriach  
prądów prawdopodobieństwa.

## 2.5 Proste wyjaśnienie fenomenologiczne

Aby wytłumaczyć w intuicyjny sposób otrzymane wyniki, możemy zastosować prosty  
opis teoretyczny. W chwili  $t = 0$  uwięziony w studni układ  $N$  bozonów ma pewną energię  
 $E_N(g)$ . Po tym, jak jeden bozon opuszcza pułapkę, energia bozonów pozostających w  
pułapce jest w przybliżeniu równa  $E_{N-1}(g)$ . Ponieważ energia uciekającego bozonu nie  
może być ujemna (jest on prawie swobodną cząstką), tunelowanie pojedynczego bozonu  
jest możliwe tylko w przypadku, gdy  $E_N(g) \geq E_{N-1}(g)$ . W badanym układzie dwóch  
bozonów stwierdzamy, że odpowiedni warunek  $E_2(g) \geq E_1(g)$  jest spełniony dla  $g \geq -0.95$   
(patrz rys. 14). Jest to wartość bardzo bliska poprzednio znalezionemu punktowi przejścia  
 $g \approx -0.94$ . W przypadku trzech bozonów analogiczny warunek  $E_3(g) \geq E_2(g)$  spełniony  
jest dla  $g \geq -0.51$  (patrz rys. 15). Wynik ten ponownie jest bardzo bliski poprzednio  
znalezionemu punktowi przejścia  $g \approx -0.51$ , poniżej którego tunelowanie pojedynczych  
bozonów zaczyna zanikać.

W przypadku tunelowania związanych par sprawa jest nieco bardziej skomplikowana,  
gdyż trzeba wziąć pod uwagę całkowitą energię tunelującej pary. Energia wiązania





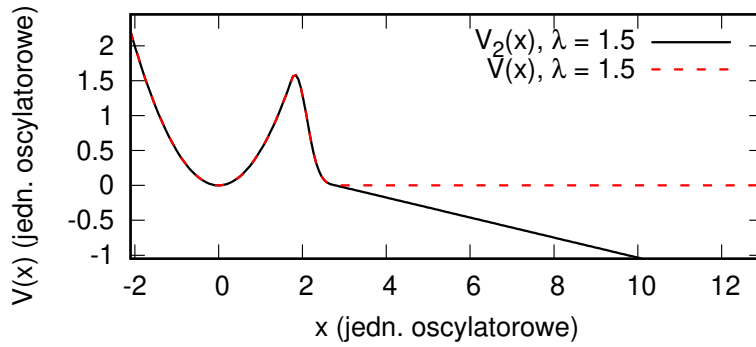
**Rysunek 15:** Energia początkowa  $E_3(g)$  układu trzech bozonów (czerwona linia), energia początkowa  $E_2(g)$  układu dwóch bozonów (niebieska linia kreskowana) oraz energia związanej pary plus energia pojedynczego bozonu  $E_{pair}(g) + E_1(g)$  (zielona linia kropkowana), zależnie od siły oddziaływań kontaktowych  $g$ . Pionowe linie kreskowane wskazują siłę oddziaływań  $g \approx -0.51$ , powyżej której  $E_3(g) > E_2(g)$ , oraz siłę oddziaływań  $g \approx -0.73$ , powyżej której  $E_3(g) > E_{pair}(g) + E_1(g)$ . Energia podana jest w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siła oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ . (Oparto na rys. 9 z [64].)

dla pary bozonów w pustej przestrzeni wynosi  $E_{pair}(g) \approx -g^2/4$  (jak stwierdziliśmy w podrozdziale 2.2 podczas omawiania widma hamiltonianu). Co za tym idzie, tunelowanie par możliwe jest wtedy, gdy  $E_N(g) \geq E_{N-2}(g) - g^2/4$ . Stosując ten wynik do układu trzech bozonów, przekonujemy się (jak pokazano na rys. 15), że warunek ten spełniony jest dla  $g \geq -0.73$ . Zgadza się to bardzo dobrze z ustalonym wcześniej punktem przejścia  $g \approx -0.72$ , poniżej którego zanika tunelowanie par. Dla układów o  $N > 3$  można łatwo rozszerzyć to fenomenologiczne podejście na tunelowanie większych liczb cząstek.

W tym miejscu zauważmy jednak, że powyższa uproszczona argumentacja fenomenologiczna ma swoje ograniczenia, gdyż nie można za jej pomocą przewidzieć względnego wkładu poszczególnych kanałów rozpadu. Na przykład nie można w ten sposób przewidzieć, że dla  $N = 3$  bozonów, w przypadku oddziaływań o pośredniej sile, w dynamice udział biorą wszystkie trzy kanały rozpadu. Jednak w tym podejściu można przewidzieć z bardzo dobrą precyzją pozycje przejść między poszczególnymi reżimami.

## 2.6 Rola kształtu potencjału

Kluczową cechą omawianego do tej pory potencjału zewnętrznego  $V(x)$  jest fakt, że w obszarze poza studnią zmierza on do stałej wartości. Właśnie dzięki temu możliwe jest choćby przeprowadzenie analizy fenomenologicznej, ponieważ tylko w takim potencjale można określić precyzyjne warunki energetyczne dla konkretnych mechanizmów tunelowania. Jednak potencjały zewnętrzne realizowane w eksperymentach mogą przybierać także inne formy. Na przykład w przypadku eksperymentu w Heidelbergu (patrz rys. 1 na str. 2) zewnętrzny potencjał w obszarze poza studnią jest opadający i dla nieskończonej odległości od studni ( $x \rightarrow \infty$ ) nie jest ograniczony od dołu. Oczywiście, w takim przypadku nasze uproszczone podejście fenomenologiczne przestaje być poprawne, ponieważ energia uciekających cząstek nie ma już określonej dolnej granicy. Tak więc pojawia się pytanie, na ile kształt potencjału ma wpływ na stwierdzone powyżej właściwości układu. Aby odpowiedzieć na to pytanie, analizujemy dynamikę dwóch bozonów w zmodyfikowanym potencjale, który w obszarze poza studnią nie jest ograniczony od dołu. Przyjęty przez nas zmodyfikowany potencjał  $V_2(x)$  (przedstawiony na rys. 16) dany jest



**Rysunek 16:** Zmodyfikowany, nieograniczony od dołu potencjał zewnętrzny  $V_2(x)$  dany przez (2.14) (czarna linia ciągła), w porównaniu z potencjałem  $V(x)$  (czerwona linia kreskowana). Energia i długość podane są odpowiednio w jednostkach  $\hbar\Omega$  i  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

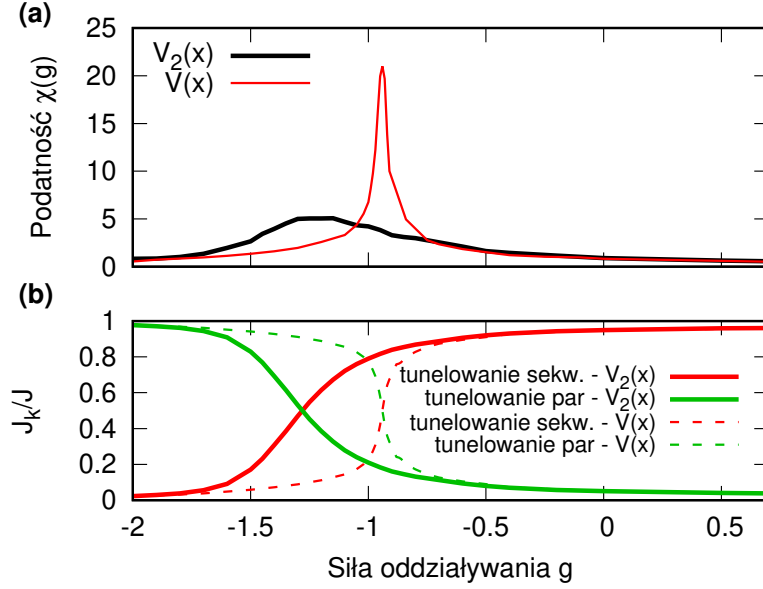
przez

$$V_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2, & x < \sqrt{2\lambda}x_0, \\ \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 e^{-6(x/x_0 - \sqrt{2\lambda})^2}, & \sqrt{2\lambda}x_0 \leq x \leq a, \\ [-b(x/x_0) + c]\hbar\Omega, & x > a. \end{cases} \quad (2.14)$$

Współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$  są przy tym dobrane tak, aby potencjał  $V_2(x)$  i jego pochodna były w każdym punkcie ciągłe. W tym przypadku (dla  $\lambda = 1.5$ ) przyjęto  $a = 2.7x_0$ ,  $b = 0.14345$ ,  $c = 0.4005$ .

Na rys. 17a przedstawiono podatność  $\chi(g)$  stałej rozpadu dla układu dwóch bozonów w potencjale  $V_2(x)$ , skontrastowaną z  $\chi(g)$  w przypadku ograniczonego od dołu potencjału  $V(x)$ . Widać, że dla układu w potencjale  $V_2(x)$  nadal pojawia się maksimum w  $\chi(g)$ , lecz jest ono znacznie mniej ostre niż maksimum pojawiające się w przypadku potencjału  $V(x)$ . Wskazuje to, że dla potencjału  $V_2(x)$  przejście między dwoma reżimami jest znacznie łagodniejsze niż ostre przejście, które wcześniej zaobserwowano dla potencjału  $V(x)$ . Jest to potwierdzone na rys. 17b, gdzie porównano udział tunelowania sekwencyjnego i par w ogólnej dynamice ( $J_1/J$  oraz  $J_0/J$ ) dla układów w potencjałach  $V_2(x)$  i  $V(x)$ . Widzimy, że nachylenie  $J_k/J$  w funkcji  $g$  jest mniejsze dla potencjału  $V_2(x)$ , co świadczy o tym, że zmiana dominującego procesu tunelowania nie jest równie naga.

Nieostra postać przejścia dla potencjału  $V_2(x)$  wynika w naturalny sposób z faktu, że ściśle warunki zachowania energii nie mogą istnieć, kiedy energia potencjalna poza barierą nie ma dolnego ograniczenia. Zauważmy też, że potencjał przybiera wartości ujemne (w odniesieniu do lokalnego minimum studni), więc bozony o ujemnej energii mogą uciec ze studni bez naruszania prawa zachowania energii. W wyniku tego, tunelowanie pojedynczego bozonu nie jest już tak silnie tłumione. Co za tym idzie, krytyczna wartość  $g$ , w której następuje przejście (a wraz z nią maksimum  $\chi(g)$ ) przesuwa się w stronę silniejszych oddziaływań przyciągających. Warto zwrócić uwagę, że obserwacja ta otwiera nową możliwość eksperymentalnej kontroli nad właściwościami tunelującego układu. Przez zmianę kształtu potencjału zewnętrznego można bowiem zmienić dominujące mechanizmy tunelowania, w tym krytyczną wartość siły oddziaływań, przy której następuje przejście do dominacji tunelowania par.



**Rysunek 17:** (a) Podatność  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$  dla układu w zmodyfikowanym potencjale  $V_2(x)$  (czarna gruba linia), w porównaniu z  $\chi(g)$  dla potencjału  $V(x)$  (cienka czerwona linia). Ze względu na brak precyzyjnie określonych warunków zachowania energii dla potencjału  $V_2(x)$ , ostry pik w  $\chi(g)$  staje się mniej wyraźny. Maksimum przesunęło się w stronę silniejszych przyciągań, ponieważ bozony o energiach poniżej zera mogą teraz uciec ze studni, a tunelowanie jednociałowe jest stłumione w mniejszym stopniu. (b) Względny udział tunelowania sekwencyjnego  $J_1/J$  i par  $J_0/J$  dla układu w potencjale  $V(x)$  (kreskowane linie) oraz w potencjale  $V_2(x)$  (ciągłe linie). Dla potencjału  $V_2(x)$  przejście między dwoma reżimami staje się bardziej nieostre. Siłę oddziaływań  $g$  podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , podatność w jednostkach  $\sqrt{m/\hbar^3\Omega}$ . (Oparto na rys. 10 z [64].)

## 2.7 Rozkłady pędów tunelujących cząstek

W poprzednim podrozdziale zbadaliśmy dynamikę z punktu widzenia przestrzennej konfiguracji tunelujących bozonów. Teraz przyjrzymy się dynamice z perspektywy rozkładu pędów tunelujących cząstek. Zbadamy, jak wygląda rozkład pędów tunelujących bozonów i w jaki sposób zmienia się on w zależności od natury procesu tunelowania.

### 2.7.1 Przypadek dwóch bozonów

#### Jedno- i dwuciałowy rozkład pędów uciekających cząstek

Zacznijmy od układu  $N = 2$  bozonów, dla którego możemy zdefiniować dwuciałowy rozkład pędów

$$\pi_2(k_1, k_2; t) = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int dx_1 dx_2 e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \Psi(x_1, x_2; t) \right|^2 \quad (2.15)$$

oraz jednociałowy rozkład pędu

$$\pi_1(k; t) = \int dk' \pi_2(k, k'; t). \quad (2.16)$$

Należy zauważyć, że z eksperymentalnego punktu widzenia pomiar rozkładu pędu jest możliwy. Opracowano bowiem odpowiednie techniki pomiaru pozycji i prędkości

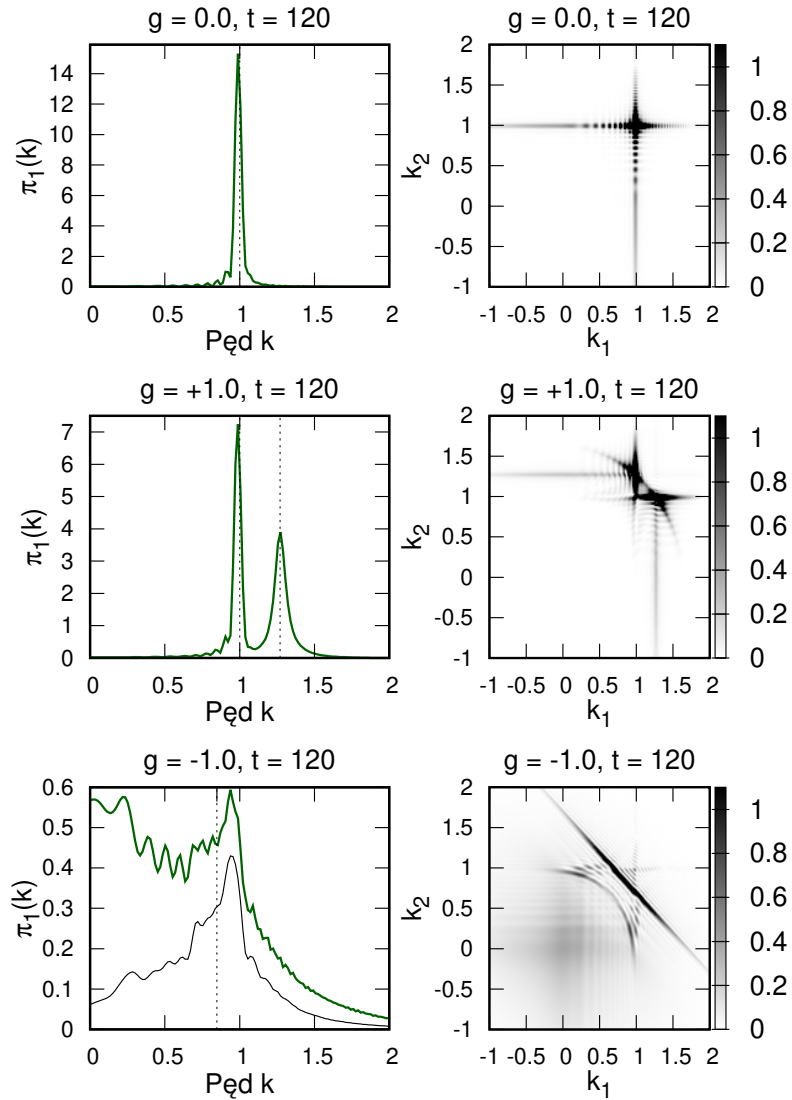
pojedynczych, nieuwięzionych atomów [86–92]. W szczególności w pracy [51] zaproponowany został schemat eksperymentalny pomiaru pędu cząstek, przystosowany właśnie do zagadnienia cząstek emitowanych ze studni potencjału.

Na rys. 18 pokazujemy jedno- i dwuciałowe rozkłady pędów dla kilku różnych wartości siły oddziaływań, po tym, jak bozonom pozwolono tunelować przez pewien czas  $t$ . Ponieważ stan początkowy ma w przybliżeniu postać gaussowską, dla  $t = 0$  oba rozkłady pędów także mają niemal gaussowski kształt, o środku w punkcie  $k_1 = 0, k_2 = 0$ . Dla większych czasów w rozkładach  $\pi_2$  i  $\pi_1$  pojawiają się charakterystyczne struktury, w zależności od mechanizmu tunelowania dominującego w dynamice. W przypadku nieoddziaływanego układu ( $g = 0$ ), kiedy bozony tunelują ze studni, w rozkładzie  $\pi_1$  pojawia się wąski pik o środku w punkcie  $k_0 \approx 1.0$ . Widać wyraźnie, że każdy z bozonów jest emitowany z bardzo dobrze określonym pędem, a ponieważ bozony są w tym samym stanie i tunelują niezależnie, pęd ten jest taki sam dla obu z nich. Dwuciałowy rozkład pędów jest w tym przypadku po prostu iloczynem dwóch identycznych rozkładów jednociałowych,  $\pi_2(k_1, k_2; t) = \pi_1(k_1; t)\pi_1(k_2; t)$ . W rozkładzie  $\pi_2$  widoczne są wyraźne linie poziome/pionowe w pobliżu wartości  $k_1 = k_0$  i  $k_2 = k_0$ . Ich obecność wskazuje, że bozon, który w danej chwili przebywa już poza studnią, ma wąsko określoną wartość pędu, podczas gdy bozon uwięziony w studni nadal ma rozkład pędu o postaci gaussowskiej.

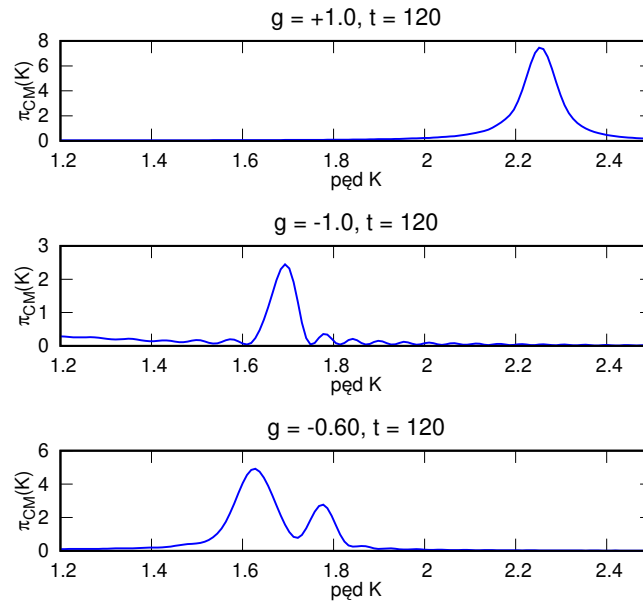
Rozkłady pędów stają się bardziej skomplikowane dla układów oddziaływających. W przypadku oddziaływań odpychających ( $g = +1.0$ ) dynamika, jak wiemy, jest zdominowana przez sekwencyjne tunelowanie bozonów. To zachowanie znajduje odzwierciedlenie w jednociałowym rozkładzie pędu  $\pi_1(k; t)$ , w którym pojawiają się dwa oddzielne piki. Jeden z nich jest skupiony wokół wartości  $k_0$ , takiej samej jak w przypadku nieoddziaływającym, podczas gdy drugi znajduje się w pobliżu większej wartości pędu,  $k' \approx 1.27$ . Te dwie różne wartości pędu można bezpośrednio skojarzyć z pędami kolejno emitowanych bozonów. Ze względu na oddziaływania odpychające pierwszy bozon opuszczający studnię ma zwiększoną energię i w konsekwencji ma większy pęd  $k'$ . Drugi bozon nie odczuwa już żadnego oddziaływania i dlatego tuneluje z pędem  $k_0$ . Oznacza to także, że pęd emitowanych cząstek jest przyczynowo skorelowany, tj. bozon może zostać wyemitowany z pędem  $k_0$  tylko wtedy, gdy drugi został już wyemitowany z pędem  $k'$ . Ta korelacja czasowa znajduje bezpośrednie odzwierciedlenie w dwuciałowym rozkładzie pędów  $\pi_2(k_1, k_2; t)$ . Wyraźnie widać, że prawdopodobieństwo znalezienia bozonu o pędzie  $k_0$  prawie zanika, jeżeli pozostały bozon ma pęd inny niż  $k'$ . Z drugiej zaś strony, jeśli dany bozon ma pęd  $k'$ , drugi bozon ma niemal gaussowski rozkład pędu (charakterystyczny dla bozonu uwięzionego w studni).

Konkretne wartości pędu emitowanych bozonów  $k_0$  i  $k'$  można łatwo znaleźć, analizując odpowiednie energie układu. W analizowanym przypadku ( $g = +1.0$ ) energia początkowa dwóch uwięzionych bozonów to  $E_2(g) \approx 1.306$ , podczas gdy energia pojedynczego bozonu w studni to  $E_1 = 0.5$ . Energie te odpowiadają pędem  $k' = \sqrt{2(E_2(g) - E_1)} \approx 1.27$  i  $k_0 \approx \sqrt{2E_1} = 1.00$  (kreskowane linie pionowe na lewym środkowym i lewym górnym wykresie na rys. 18). Wyniki numeryczne dla wartości pędów okazują się być w pełni zgodne z tą fenomenologiczną analizą.

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi silnych oddziaływań przyciągających ( $g = -1.0$ ), dla których  $E_2(g) < E_1$ . W tym przypadku, jak już wiemy, sekwencyjne tunelowanie jest silnie stłumione przez zasadę zachowania energii, a bozony są emitowane głównie jako związane pary. Rozkład pędu pojedynczej cząstki  $\pi_1(k; t)$  jest w tym wypadku dość szeroki. Jednak w dwuciałowym rozkładzie pędów  $\pi_2(k_1, k_2; t)$  widać wyraźną korelację między pędami emitowanych bozonów. Mianowicie, gęstość prawdopodobieństwa pędów jest skupiona wzdłuż linii  $k_1 + k_2 = K = \text{const}$ . Wskazuje to, że bozony są emitowane



**Rysunek 18:** Jednociałowy rozkład pędu  $\pi_1(k; t)$  i dwuciałowy rozkład pędów  $\pi_2(k_1, k_2; t)$  układu dwóch bozonów dla różnych sił oddziaływań kontaktowych  $g$ , w konkretnej chwili  $t = 120$ . Czarne linie przerywane oznaczają przewidywane wartości charakterystycznych pędów, obliczone z energii układu (patrz tekst). W układzie nieoddziałującym ( $g = 0.0$ ) dwa bozony są emitowane pojedynczo, z identycznymi pędami. W układzie odpychającym ( $g = 1.0$ ) dwa bozony emitowane są sekwencyjnie z dwoma różnymi pędami. W układzie o odpowiednio silnych przyciąganiach ( $g = -1.0$ ) bozony emitowane są jako związana para o dobrze określonym pędzie środka masy. Dla  $g = -1.0$ , cienka czarna linia oznacza  $\pi_1$  w przypadku, gdy równanie (2.16) zostało przedefiniowane, by wykluczyć część funkcji falowej, odpowiadającą cząstkom uwięzionym w studni. Pędy podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar m \Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ . (Oparto na rys. 5a z [65].)

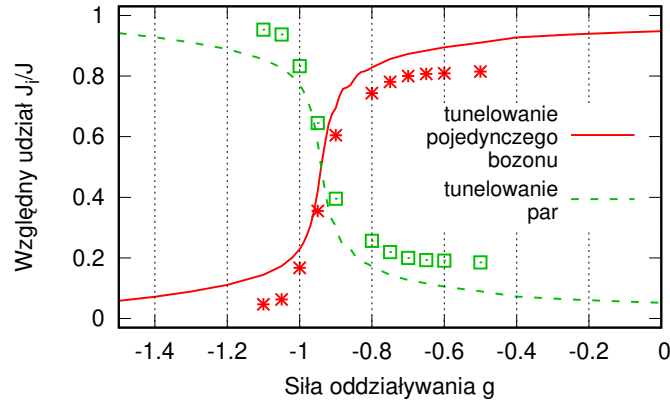


**Rysunek 19:** Rozkłady pędu środka masy  $\pi_{CM}(K; t)$  układu dwubozonego dla różnych wartości  $g$ , w określonej chwili  $t = 120$ . Dla układów odpychających ( $g = +1.0$ ) i wystarczająco silnie przyciągających ( $g = -1.0$ ) dostępny jest tylko jeden proces rozpadu (odpowiednio, tunelowanie sekwencyjne i par) i jest to odzwierciedlone w rozkładzie  $\pi_{CM}$  przez obecność tylko jednego piku. W przypadku układu o słabszych przyciąganiach ( $g = -0.6$ ) możliwe są zarówno tunelowanie sekwencyjne, jak i par. W wyniku tego w widmie pojawiają się dwa piki, każdy odpowiadający innemu procesowi rozpadu. Pędy podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar m \Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ . (Oparto na rys. 6 z [65].)

jednocześnie jako związana para z wyraźnie określonym pędem środka masy  $K$  (w tym przypadku  $K \approx 1.70$ ), przy czym cząstki oscylują wokół środka masy z przeciwnymi względnymi pędami. Zauważmy, że w rozkładzie  $\pi_2(k_1, k_2; t)$  widoczne jest również dodatkowe tło gaussowskie o środku w punkcie  $k_1 = k_2 = 0$ . Ta część rozkładu pędów reprezentuje bozony, które jeszcze nie opuściły studni.

Warto zauważyć, że używając operatora rzutowego  $\mathbf{P} = \theta(x_1 - x_w)\theta(x_2 - x_w)$  można zapisać dwucząstkową funkcję falową  $\Psi$  jako sumę dwóch ortogonalnych funkcji falowych,  $\Psi_{IN} = \mathbf{P}\Psi$  i  $\Psi' = (1 - \mathbf{P})\Psi$ . Wtedy  $\Psi_{IN}$  koduje stan dokładnie dwóch bozonów znajdujących się w studni, podczas gdy  $\Psi'$  koduje pozostałą część układu dwucząstkowego. Dzięki tej metodzie możliwe jest badanie rozkładu pędu wyemitowanych bozonów, niezależnie od stanu bozonów pozostających w studni. Podejście to odpowiada prostej modyfikacji definicji (2.15) i (2.16) poprzez ograniczenie funkcji falowej tylko do części  $\Psi'$ . Takie podejście jest również uzasadnione eksperymentalnie, ponieważ zmierzenie pędu tylko tych cząstek, które opuściły studnię, jest możliwe w praktyce. W wyniku tej redefinicji, rozkład pędu jednociałowego zostaje znacznie zmodyfikowany (cienka linia na lewym dolnym wykresie na rys. 18), ponieważ zostaje usunięte tło, reprezentujące cząstki uwięzione w studni. Dzięki tej modyfikacji wyraźnie widać, że rozkład jednociałowego pędu emitowanych bozonów ma swoje maksimum w pobliżu  $K/2$ , czyli połowy pędu środka masy (pionowa linia przerywana na lewym dolnym wykresie na rys. 18).

Konkretną wartość pędu środka masy  $K$  można znów przewidzieć za pomocą prostej argumentacji fenomenologicznej. W tym przypadku energia początkowa układu  $E_2(g)$  zo-



**Rysunek 20:** Względny udział tunelowania par i sekwencyjnego w ogólnej dynamice układu dwubozonego dla różnych sił oddziaływań kontaktowych  $g$ . Zielone i czerwone symbole pokazują odpowiednio udział tunelowania par i tunelowania sekwencyjnego, obliczony na podstawie obszarów odpowiednich pików w rozkładzie pędu środka masy  $\pi_{\text{CM}}$  w chwili  $t = 180$ . Dla porównania odpowiednie wyniki z rys. 12 ukazane są jako linie (zielona przerywana i czerwona ciągła). Siła oddziaływań jest podana w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ . (Oparto na rys. 7 z [65].)

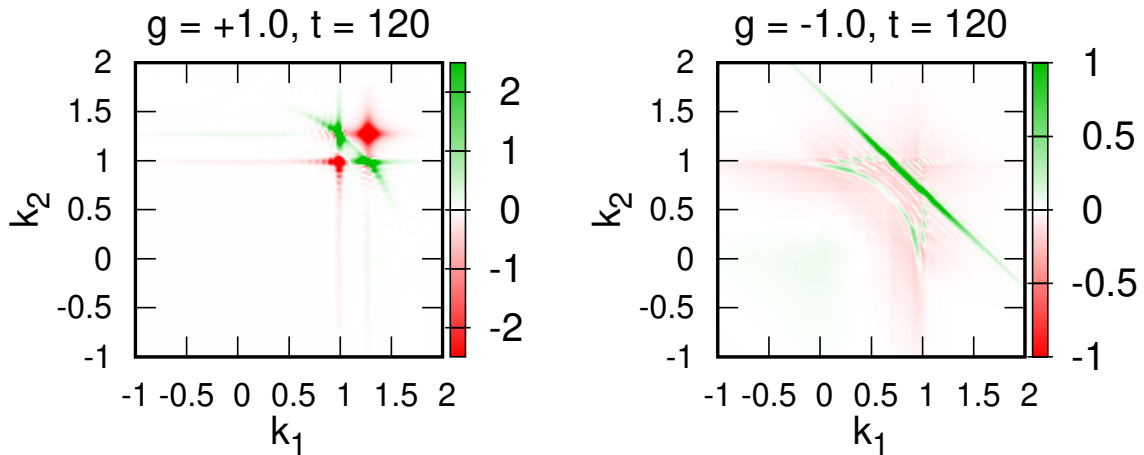
staje w pełni przekształcona w energię wyemitowanej oddziałującej pary  $E_p(g)$ . Energia tej pary, jak już było wspomniane w podrozdziale 2.2, wynosi około  $E_p(g) \approx (K^2 - g^2)/4$ . W związku z tym  $K = \sqrt{4E_2(g) + g^2}$ . W badanym przypadku ( $g = -1.0$ ) można znaleźć  $E_p(g) \approx 0.47$  i  $K \approx 1.70$ , co bardzo dobrze zgadza się z naszymi numerycznymi wynikami dla rozkładu pędu.

### Rozkład pędu środka masy

Układ tunelujących bozonów można dodatkowo scharakteryzować przez rozkład pędu środka masy  $K = k_1 + k_2$ . Można go uzyskać z dwuciałowego rozkładu pędu w następujący sposób:

$$\pi_{\text{CM}}(K; t) = \int dk_2 \pi_2(K - k_2, k_2; t). \quad (2.17)$$

Na rys. 19 ukazany został rozkład  $\pi_{\text{CM}}(K; t)$  dla trzech różnych wartości siły oddziaływań  $g$ , po tym, jak układ ewoluował przez pewien czas  $t$ . W przypadku oddziaływań odpychających ( $g = +1.0$ ) oraz silnych oddziaływań przyciągających ( $g = -1.0$ ) w rozkładzie tym występuje pojedynczy pik. Jest on położony, odpowiednio, w pobliżu sumy pędów poszczególnych emitowanych bozonów ( $k_0 + k' \approx 2.27$ ) lub w pobliżu pędu związanej pary ( $K \approx 1.70$ ). Jednak dla słabszych przyciągań (na przykład  $g = -0.6$ ), kiedy może występować zarówno tunelowanie sekwencyjne, jak i par, rozkład  $\pi_{\text{CM}}(K; t)$  zawiera dwa wyraźne piki. Każdy z nich można bezpośrednio powiązać z określonym mechanizmem tunelowania. Wynika z tego interesująca możliwość. Mianowicie, porównując intensywności obu pików, można określić względny udział różnych mechanizmów tunelowania w ogólnej dynamice – podobnie, jak robiliśmy to wcześniej, analizując prądy prawdopodobieństwa (patrz podrozdział 2.4.1 na str. 19). Ponieważ zmierzenie pędów jest o wiele mniej wymagające z eksperymentalnego punktu widzenia niż bezpośrednia analiza prądu prawdopodobieństwa, metoda ta otwiera doświadczalną możliwość bezpośredniego wykrywania przejścia między różnymi mechanizmami tunelowania.



**Rysunek 21:** Rozkład korelacji szumu  $\mathcal{G}(k_1, k_2; t)$  dla układu dwubozonowego, dla  $g = \pm 1.0$  i  $t = 120$ . Wyraźnie widać pędowe korelacje (na zielono) i antykorelacje (na czerwono), których nie da się poprawnie uwzględnić na poziomie opisu jednociałowego. Pędy podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar m \Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ . (Oparto na rys. 5b z [65].)

Aby zademonstrować skuteczność tej metody, na rys. 20 pokazuję względny udział tunelowania par (zielone symbole) i tunelowania sekwencyjnego (czerwone symbole), wyliczone z pól pod odpowiednimi pikami rozkładu  $\pi_{\text{CM}}$ , dla kilku przykładowych sił oddziaływań  $g$ . Na wykresie ukazano również (jako czerwone i zielone linie) wyniki uzyskane wcześniej przez teoretyczną analizę prądów prawdopodobieństwa (wcześniej przedstawione na rys. 12 ze str. 20). Widzimy, że między wynikami w obu przypadkach zachodzi jakościowa zgodność. Metoda ta oferuje zatem obiecującą możliwość eksperymentalnego wykrywania przejścia między poszczególnymi reżimami.

## 2.7.2 Rozkład korelacji szumu

Aby uczynić tę analizę bardziej wyczerpującą, zanim przejdę do omówienia problemu trzech tunelujących bozonów, zatrzymam się na chwilę na wyeksponowaniu korelacji dwuciałowych, indukowanych oddziaływaniami. Jest to o tyle istotne, że nawet w układzie nieoddziałującym mogą istnieć przypadkowe korelacje, zaburzające przedstawiony wyżej obraz. Jedną z metod zbadania takich korelacji jest rozważenie rozkładu tzw. korelacji szumu (ang. *noise correlation*) [93–97]. Wielkość ta jest zdefiniowana jako różnica między pełnym rozkładem dwuciałowym, a iloczynem odpowiednich rozkładów jednociałowych:

$$\mathcal{G}(k_1, k_2; t) = \pi_2(k_1, k_2; t) - \pi_1(k_1; t)\pi_1(k_2; t). \quad (2.18)$$

Z fenomenologicznego punktu widzenia rozkład tej wielkości można interpretować jako rozkład korelacji wymuszonych przez międzycząstkowe oddziaływania, których nie można uchwycić na poziomie żadnego opisu jednociałowego. Na rys. 21 ukazane są rozkłady  $\mathcal{G}(k_1, k_2; t)$  dla dwóch różnych wartości siły oddziaływań, odpowiadających dominacji dwóch różnych kanałów rozpadu ( $g = \pm 1.0$ ). Dzięki temu wyraźnie widać obszary, w których występują silne korelacje między pędami dwóch cząstek (obszary zielone), które nie zostałyby poprawnie uwzględnione w opisie na poziomie jednociałowym.



wym. Co ważniejsze, rozkład korelacji szumu dobrze uwidacznia wyżej wspomniane korelacje czasowe między sekwencyjnie emitowanymi cząstkami (linie pionowe/poziome zlokalizowane wokół  $k_0 \approx 1.00$  dla  $g = +1.0$ ).

### 2.7.3 Przypadek trzech bozonów

Zastosujmy teraz powyższe metody do analizy układu  $N = 3$  bozonów. Ponieważ teraz bozony mogą tunelować na więcej sposobów (jako pojedyncze cząstki, związane pary lub trimery), rozkłady pędów układu wykazują bardziej skomplikowane struktury. Aby je zbadać, zdefiniujemy najpierw trójciałowy rozkład pędów  $\pi_3(k_1, k_2, k_3; t)$ :

$$\pi_3(k_1, k_2, k_3; t) = \frac{1}{8\pi^3} \left| \int dx_1 dx_2 dx_3 \times \right. \quad (2.19)$$

$$\left. e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} \Psi(x_1, x_2, x_3; t) \right|^2.$$

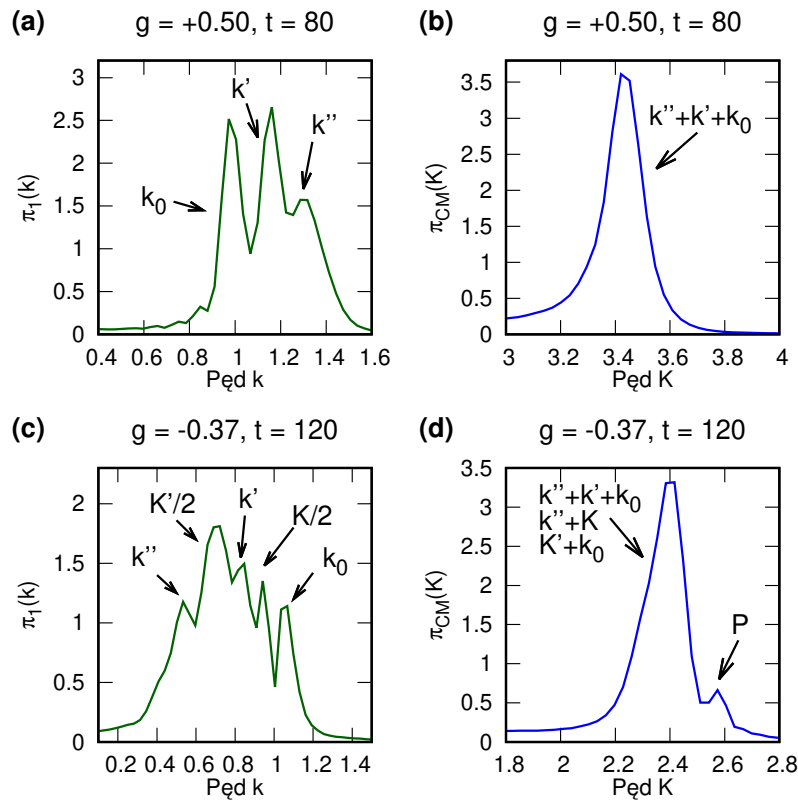
Dla trzech cząstek jednociłowy rozkład pędu oraz rozkład pędu środka masy  $\pi_1, \pi_{\text{CM}}$  są zdefiniowane następująco:

$$\pi_1(k; t) = \int dk' dk'' \pi_3(k, k', k''; t), \quad (2.20a)$$

$$\pi_{\text{CM}}(K; t) = \int dk' dk'' \pi_3(K - k' - k'', k', k''; t). \quad (2.20b)$$

Na rys. 22 pokazujemy rozkłady  $\pi_1$  i  $\pi_{\text{CM}}$  dla układu trzech bozonów o różnych wartościach siły oddziaływań, po tym, jak układ ewoluował przez pewien czas  $t$ . Skupmy się najpierw na przypadku oddziaływań odpychających  $g = 0.50$ . W tym przypadku bozony nie mogą tworzyć stanów związanych i, co za tym idzie, tunelują jeden po drugim. Kolejne emitowane bozony mają pędy  $k'', k'$  i  $k_0$ . Podobnie jak w przypadku układu dwubozonego, pędy te można wyliczyć bezpośrednio z odpowiednich energii układu. Dla  $g = 0.50$  otrzymujemy  $k'' \approx 1.29, k' \approx 1.16, k_0 \approx 1.00$ . Wynik ten znajduje bezpośrednio odzwierciedlenie w rozkładzie  $\pi_1$ , w którym widać trzy różne piki zlokalizowane w pobliżu tych wartości (rys. 22a). Podobnie w rozkładzie  $\pi_{\text{CM}}$  widoczny jest pojedynczy, wyraźny pik zlokalizowany w punkcie  $k'' + k' + k_0 \approx 3.45$ , co potwierdza, że jedynym dostępnym procesem jest tunelowanie sekwencyjne (rys. 22b). Zauważyć można, że w porównaniu z rozkładami pędu dla dwóch bozonów (patrz rys. 18 na str. 27) piki na rys. 22a nie są równie wyraźnie rozdzielone. Głównym powodem jest to, że charakterystyczne pędy  $k'', k', k_0$  wypadają dość blisko siebie, a zatem odpowiadające im piki w rozkładzie pędu, które mają swoją naturalną szerokość, częściowo się pokrywają.

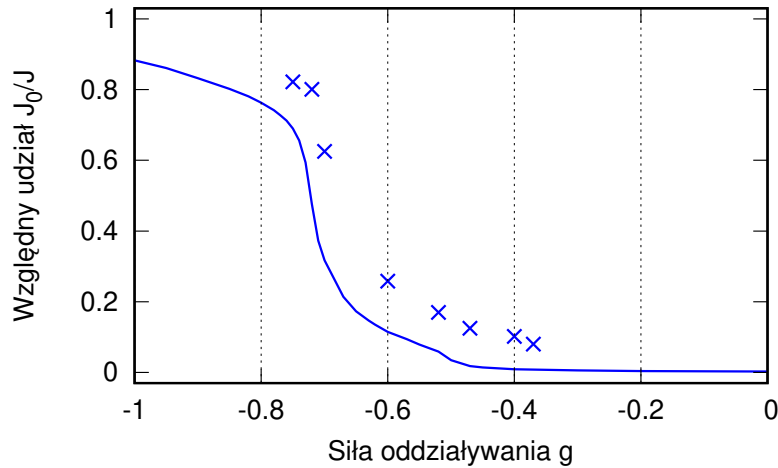
Sytuacja wygląda inaczej w przypadku oddziaływań przyciągających. Na przykład dla  $g = -0.37$  układ wykazuje pełną różnorodność procesów tunelowania i jego rozpad może zachodzić na kilka różnych sposobów. Pierwszy scenariusz to sekwencyjne tunelowanie trzech niezależnych cząstek, jak opisano powyżej. W drugim scenariuszu następuje najpierw emisja niezależnego bozonu o pędzie  $k''$ , a następnie emisja pary o pędzie środka masy  $K$ . W trzecim scenariuszu pierwsze dwie cząstki tunelują jako para związana z pędem środka masy  $K'$ , a następnie pozostała cząstka tuneluje pojedynczo z pędem  $k_0$ . Ostatnią możliwością jest to, że wszystkie trzy bozony tunelują jako związany trimer z pędem środka masy  $P$ . Podobnie jak w przypadku dwóch bozonów, otrzymanie wszystkich tych charakterystycznych pędów jest proste dzięki analizie energii każdej emitowanej grupy cząstek. Dla  $g = -0.37$  otrzymujemy następujące wartości:  $k'' \approx 0.57, k' \approx 0.82, k_0 \approx 1.00, K \approx 1.86, K' \approx 1.46, P \approx 2.61$ .



**Rysunek 22:** Jednociałowy rozkład pędu  $\pi_1(k; t)$  oraz rozkład pędu środka masy  $\pi_{CM}(K; t)$  układu trzech bozonów dla dwóch różnych wartości siły oddziaływań kontaktowych  $g$ , w określonych chwilach  $t$ . W przypadku oddziaływań odpychających (górny rząd) trzy bozony emitowane są sekwencyjnie z dobrze określonymi pędami  $k'', k', k_0$ . W przypadku oddziaływań przyciągających (dolny rząd) bozony mogą dodatkowo tunelować jako związane pary o dobrze określonych pędach środka masy  $K$  lub  $K'$ , lub jako trimer o pędzie środka masy  $P$ . Każdy pik w tych rozkładach można powiązać z określonymi charakterystycznymi pędami (jak wskazują strzałki). Pędy podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar m \Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ . (Oparto na rys. 9 z [65].)

Każdy z tych odrębnych scenariuszy rozpadu jest odzwierciedlony bezpośrednio w rozkładach pędu (rys. 22c oraz rys. 22d). W jednociałowym rozkładzie pędu  $\pi_1$  wyraźnie widoczne są piki na pozycjach  $k'', k', k_0$  odpowiadających sekwencyjnemu tunelowaniu, a także  $K/2$  i  $K'/2$ , które odpowiadają tunelowaniu par. Z kolei w rozkładzie  $\pi_{CM}$  widać dwa oddzielne piki. Pierwszy, mniejszy pik jest związany z tunelowaniem trimera i jest zlokalizowany w pobliżu wartości  $P$ . Drugi, większy pik w  $\pi_{CM}$  obejmuje zarówno procesy tunelowania pojedynczych cząstek, jak i tunelowania par, ponieważ odpowiadające im pędy środków masy wypadają bardzo blisko siebie. Widzimy zatem, że rozkłady  $\pi_1$  i  $\pi_{CM}$ , jeśli rozpatruje się je razem, mogą dostarczyć informacji o pełnej różnorodności uczestniczących procesów tunelowania.

Analogicznie do układu dwóch bozonów, teraz także możemy wykorzystać rozkład  $\pi_{CM}(K; t)$  do analizy zmieniającego się udziału różnych mechanizmów tunelowania w całym procesie rozpadu. W szczególności, przez porównanie pól powierzchni pików w rozkładzie  $\pi_{CM}(K; t)$  można uzyskać względne prawdopodobieństwo, że układ rozpadnie się przez emisję związanego trimera bozonowego. Na rys. 23 ukazano względny udział



**Rysunek 23:** Względny udział tunelowania trimeru w ogólnej dynamice układu trójbozonowego, dla różnych sił oddziaływań kontaktowych  $g$ . Niebieskie symbole pokazują udział tunelowania trimeru, obliczony na podstawie pól powierzchni odpowiednich pików w rozkładzie pędu środka masy  $\pi_{\text{CM}}$  przy  $t = 140$ . Dla porównania pokazany jest odpowiedni wynik z rys. 13 jako niebieska ciągła linia. Siła oddziaływań jest wyrażona w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ . (Oparto na rys. 10 z [65].)

tunelowania trimeru, uzyskany tą metodą dla różnych  $g$  (oznaczone krzyżykami). Dla porównania pokazujemy również analogiczną wielkość (linia ciągła), którą uzyskano wcześniej z analizy prądu prawdopodobieństwa przez barierę potencjału (jak przedstawiono wcześniej na rys. 13 ze str. 21). Ponownie widzimy, że między tymi wynikami istnieje jakościowa zgodność, niezależnie od metody wyliczenia. Potwierdza to, że analiza rozkładów pędów może umożliwić wykrycie przejścia między różnymi reżimami tunelowania.

Na koniec dodajmy jeszcze, że, podobnie jak dla dwóch bozonów, także i dla układu trzech bozonów możliwe jest wyliczenie rozkładu korelacji szumu  $\mathcal{G}(k_1, k_2)$  (który opisaliśmy w podrozdziale 2.7.2, str. 30). Jednak rozkład  $\mathcal{G}(k_1, k_2; t)$  dostarczyłby w tym przypadku jedynie informacji o korelacjach dwuciałowych, zamiast korelacji trójciałowych. Można by wprawdzie próbować zdefiniować trójciałową korelację szumu  $\mathcal{G}(k_1, k_2, k_3; t)$ , ale rozkład tego rodzaju (o trójwymiarowej strukturze) byłby trudny do jasnego przedstawienia na rysunku. Dlatego powstrzymujemy się tutaj od wyliczania korelacji szumu dla  $N = 3$  cząstek, a tylko zaznaczamy taką możliwość.

Podsumujmy wyniki tego rozdziału. Badając ewolucję układu kilku tunelujących bozonów, przekonaliśmy się, że dynamikę można opisać w kategoriach kilku odrębnych reżimów. Są one scharakteryzowane przez dominację różnych mechanizmów tunelowania. Na przykład dla układu dwóch bozonów proces rozpadu może być zdominowany przez tunelowanie sekwencyjne bądź przez tunelowanie par. Jest to uzależnione od tego, które mechanizmy tunelowania są energetycznie korzystne dla danej energii początkowej układu. Co za tym idzie, natura dynamiki tunelowania zmienia się po przekroczeniu określonych wartości siły oddziaływań  $g$ , dla których energia spada poniżej krytycznej wartości. Ponieważ zmiana natury procesu tunelowania ma znaczny wpływ na szereg mierzalnych doświadczalnie wielkości fizycznych, podział na odrębne reżimy jest fundamentalnym elementem opisu dynamiki układu.

Powstaje teraz naturalne pytanie, na ile opisane wyżej charakterystyczne właściwości tunelującego układu cząstek są zachowane dla układów o innym potencjale oddziaływań

międzycząstkowych, bądź o innej statystyce cząstek. Odpowiemy na to pytanie w kolejnych rozdziałach, koncentrując się na układach dwucząstkowych.

## Rozdział 3

# Bozony z oddziaływaniami o skończonym zasięgu

W poprzednim rozdziale zbadaliśmy dynamiczne właściwości tunelującego układu kilku bozonów oddziałujących potencjałem kontaktowym. Choć taki potencjał zwykle dobrze opisuje oddziaływania między ultrazimnymi atomami bozonowymi, możliwe jest również wytwarzanie układów, w których oddziaływania międzycząstkowe mają istotnie niezerowy zasięg. Przykładem jest realizacja ultrazimnych gazów o dominujących oddziaływaniach dipolowych [98, 99]. Oddziaływania o niezerowym zasięgu można jednak wytworzyć także innymi drogami. Jedną z możliwości jest przygotowywanie atomów w stanach rydbergowskich, czyli atomów o silnie wzbudzonych elektronach walencyjnych (o wysokiej wartości liczby kwantowej  $n$ ) [100, 101]. Efektywne oddziaływanie pomiędzy takimi atomami ma skończony, ale istotnie niezerowy zasięg. Nie wnikając w szczegóły przygotowywania takich układów atomowych, można zadać naturalne pytanie, jak zmieniają się właściwości tunelujących cząstek dla oddziaływań tego rodzaju. Jest to tym bardziej interesujące, że w tym przypadku oprócz siły oddziaływań można regulować także zasięg oddziaływań, co daje jeszcze bogatsze możliwości regulowania dynamiki układu.

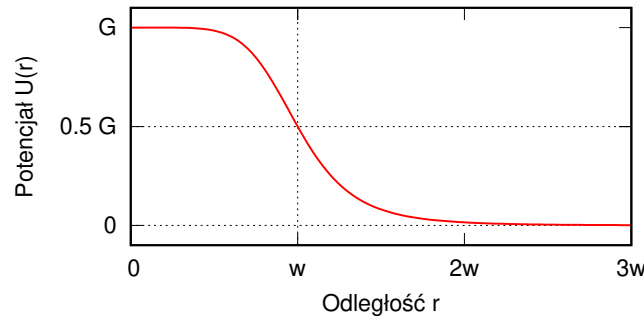
W tym rozdziale odpowiemy na to pytanie, badając dynamikę układu dwóch identycznych bozonów oddziałujących potencjałem o skończonym zasięgu i porównując wyniki z poprzednim rozdziałem. Wykorzystamy do tego celu te same metody, które zastosowaliśmy dla bozonów oddziałujących kontaktowo.

### 3.1 Hamiltonian układu wielociałowego

Rozważamy układ dwóch identycznych bozonów z oddziaływaniami międzyciałowymi o skończonym zasięgu, opisanymi przez potencjał  $U(r)$ . Tak, jak w poprzednim rozdziale, za potencjał zewnętrzny  $V(x)$  przyjmujemy potencjał (2.7) z wysokością bariery  $\lambda = 1.5$ . Hamiltonian wielociałowy dla tego układu ma następującą postać:

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_i) \right] + U(x_1 - x_2). \quad (3.1)$$

Zastanówmy się nad postacią potencjału oddziaływań  $U(r)$ . Jedną z metod wytworzenia oddziaływań o istotnie niezerowym zasięgu między ultrazimnymi atomami jest przygotowanie atomów w wewnętrznych stanach „ubranych rydbergowsko” [102–109].



**Rysunek 24:** Efektywny potencjał oddziaływania (3.2) w funkcji wzajemnej odległości  $r$ . Odległość wyrażono w stosunku do zasięgu oddziaływań  $w$ , a energię potencjalną w stosunku do parametru  $G$ . Dla dużych odległości potencjał zanika jak  $r^{-6}$ , zaś dla małych odległości ( $|r| \lesssim w$ ) zbiega do stałej wartości  $G$ .

Można to osiągnąć przez wytworzenie nierezonansowego sprzężenia laserowego między stanem podstawowym atomów, a daleko wzbudzonym stanem rydbergowskim, dzięki czemu stan podstawowy atomu zyskuje niewielką domieszkę stanu rydbergowskiego. Efektywny potencjał oddziaływań między atomami w takim „ubranym” stanie ma bardzo charakterystyczną postać [104–110]. Dla dużych odległości między cząstkami oddziaływania dwuciałowe podobne są do tych, które występują między atomami w stanach rydbergowskich. Zakładamy, że w badanym przypadku dominującym wkładem do oddziaływań są siły van der Waalsa, które zależą od względnej odległości jak  $r^{-6}$ . Z kolei dla bliskich odległości (poniżej krytycznej wartości  $w$ ) występuje tzw. efekt blokady rydbergowskiej, który tłumi jednoczesne wzbudzenie dwóch atomów [111, 112], przez co efektywne oddziaływanie wysyca się do stałej wartości [103]. Funkcję, która dobrze opisuje wynikowy efektywny potencjał oddziaływań, można zapisać w postaci

$$U(r) = \frac{G}{1 + \left[\frac{r}{w}\right]^6}, \quad (3.2)$$

gdzie parametr  $G$  (mający jednostkę energii) wyraża amplitudę energii oddziaływania w  $r = 0$ , zaś parametr  $w \geq 0$  (mający jednostkę długości) można w przybliżeniu traktować jako efektywny zasięg oddziaływań. Oba te parametry można niezależnie od siebie kontrolować eksperymentalnie. Zależą one od odstrojenia oraz częstości Rabiego sprzężenia między stanami atomów. Postać potencjału (3.2) w funkcji odległości między cząstkami przedstawiono na rys. 24.

Warto zauważyć, że potencjał (3.2) w granicy  $w \rightarrow 0$  jest w przybliżeniu równoważny potencjałowi kontaktowemu  $g\delta(r)$  z siłą oddziaływań  $g = 2wG$ . W oparciu o ten fakt przyjmujemy konwencję, która pozwoli nam wygodnie porównywać natężenie oddziaływań między układami o różnych wartościach parametru  $w$ . Mianowicie dokonujemy redefinicji  $G \rightarrow g/(2w)$  i zapisujemy potencjał (3.2) w postaci:

$$U(r) = \frac{1}{2w} \frac{g}{1 + \left[\frac{r}{w}\right]^6}. \quad (3.3)$$

W tym ujęciu oddziaływania są sparametryzowane nie przez amplitudę oddziaływań  $G$ , ale przez efektywną siłę oddziaływań  $g$  w granicy  $w \rightarrow 0$ . Wyrażenie potencjału  $U(r)$  w postaci (3.3) pomaga zapewnić, że oddziaływania z tą samą wartością siły oddziaływań  $g$  pozostają mniej więcej porównywalne dla różnych  $w$ . Pomaga to też łatwo porównywać właściwości układu z wynikami dla układu oddziałującego kontaktowo.

### 3.2 Widmo hamiltonianu wielociałowego

Podobnie, jak w przypadku układu bozonów o oddziaływaniach kontaktowych, przyjrzmy się teraz widmu stanów własnych hamiltonianu wielociałowego po otwarciu studni. Pozwoli nam to przewidzieć, jakie stany może przybrać układ dwóch bozonów po tunelowaniu ze studni.

Aby łatwiej zrozumieć strukturę tych stanów, nie będziemy od razu badać pełnego widma hamiltonianu (3.1). Zamiast tego, dla większej jasności, rozważamy najpierw jedynie względny ruch cząstek. Załóżmy dla uproszczenia, że cząstki poza studnią odczuwają zerowy potencjał zewnętrzny. Możemy wówczas opisać je uproszczonym hamiltonianem z  $V(x) = 0$ :

$$H_{\text{approx}} = \sum_{i=1}^2 \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] + U(x_1 - x_2). \quad (3.4)$$

Takie przybliżenie pozwala odseparować ruch środka masy i wyróżnić jedynie hamiltonian opisujący ruch względny obu cząstek:

$$H_r = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + U(r), \quad (3.5)$$

gdzie  $r = x_1 - x_2$  jest współrzędną względnego położenia obu cząstek. Stany własne tego hamiltonianu (funkcje falowe opisujące względny ruch cząstek) oznaczamy przez  $\phi_r(r)$ , a energie własne przez  $E_r$ . Ścisłe rozwiązanie dla tego hamiltonianu nie jest dostępne, tak więc jego funkcje i energie własne musimy uzyskać na drodze numerycznej. Strukturę widma można jednak lepiej zrozumieć, porównując widmo  $H_r$  z widmem modelu o ścisłym rozwiązaniu, który przybliży  $U(r)$  za pomocą funkcji prostokątnej o postaci

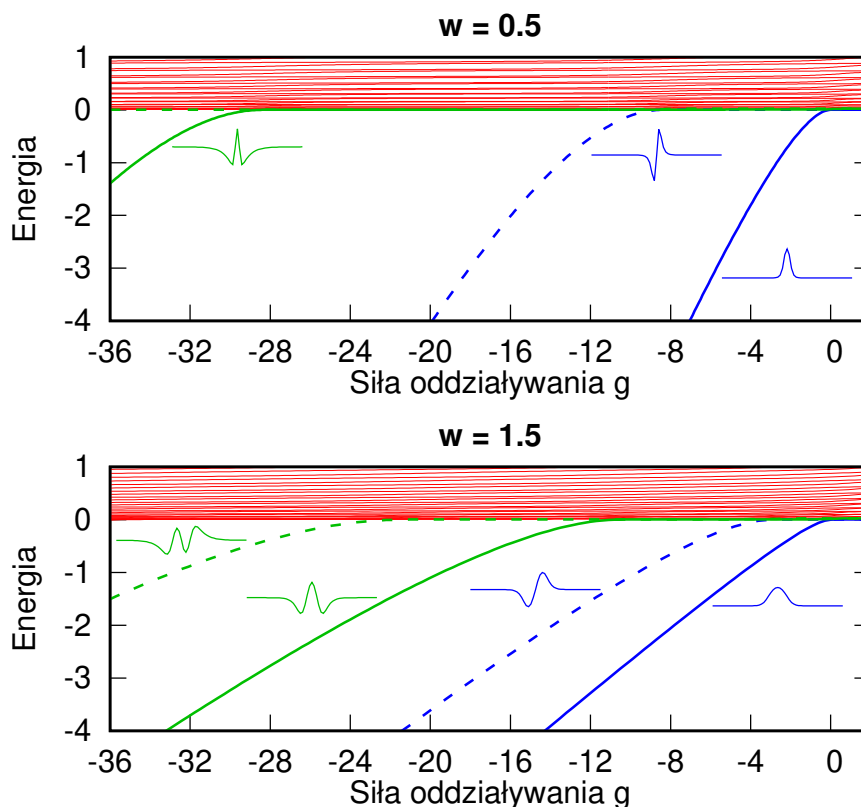
$$U'(r) = \begin{cases} g/(2w), & |r| \leq w, \\ 0, & |r| > w. \end{cases} \quad (3.6)$$

Hamiltonian w tym uproszczonym modelu

$$H_{r'} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + U'(r) \quad (3.7)$$

opisuje dobrze znane zagadnienie pojedynczej cząstki o masie  $1/2$ , ulegającej rozpraszaniu na prostokątnej barierze (dla  $g > 0$ ) lub przebywającej w prostokątnej studni potencjału (dla  $g < 0$ ) [113]. Otrzymane na drodze diagonalizacji numerycznej widmo  $H_r$  można lepiej zrozumieć, porównując je z dobrze znanymi rozwiązaniami dla hamiltonianu  $H_{r'}$ .

Na rys. 25 przedstawiono widmo energii własnych hamiltonianu  $H_r$  (3.5), obliczone na drodze numerycznej diagonalizacji, w funkcji siły oddziaływań  $g$  oraz dwa dwóch różnych wartości zasięgu  $w$ . Aby zinterpretować te wyniki, możemy bezpośrednio odnieść je do znanych ścisłych rozwiązań hamiltonianu  $H_{r'}$ , gdyż widma obu hamiltonianów są bardzo podobne. Na drodze tego porównania można wyróżnić w widmie  $H_r$  dwie grupy stanów własnych. Pierwsza grupa (energie oznaczone na czerwono) zawiera stany rozproszeniowe o energii  $E_r > 0$ , tworzące gęste pasmo. Ich funkcje falowe  $\phi_r(r)$  mają gęstość rozłożoną w całej przestrzeni i opisują konfigurację dwóch niemal swobodnych cząstek. Stany te obecne są dla wszystkich wartości  $g$ . Druga grupa (energie oznaczone na niebiesko i zielono) to stany związane o ujemnej energii  $E_r < 0$ . W przeciwieństwie



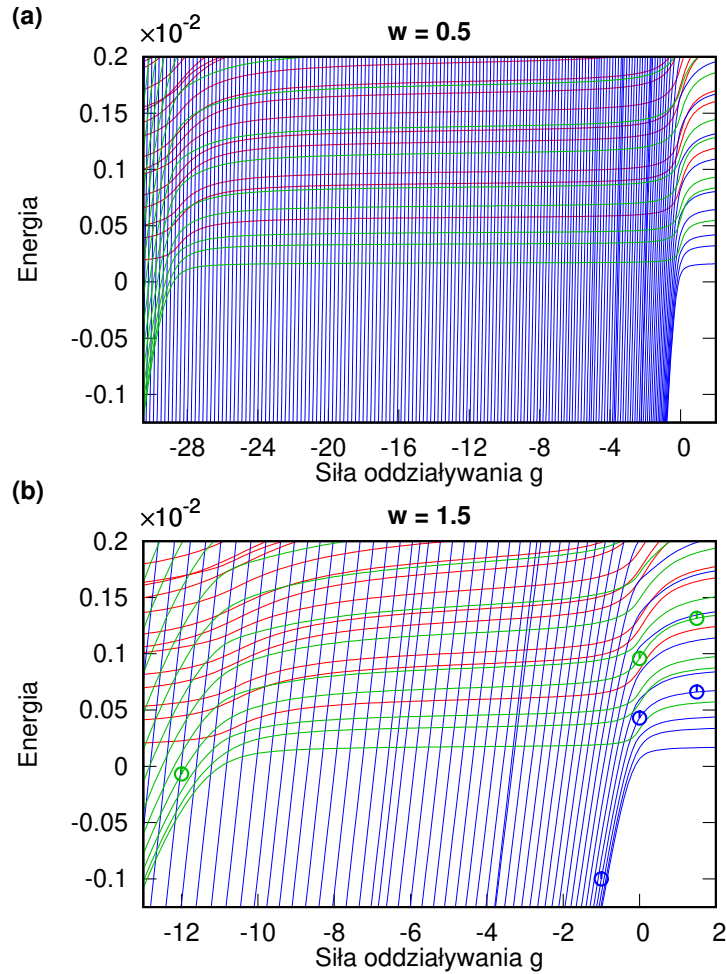
**Rysunek 25:** Widmo energii własnych hamiltonianu względnego ruchu  $H_{rel}$  (3.5) dla dwóch cząstek w pustej przestrzeni oddziałujących potencjałem  $U(r)$ , jako funkcja siły oddziaływań  $g$ . Pokazano wyniki dla dwóch różnych zasięgów oddziaływań: (a)  $w = 0.5$ , (b)  $w = 1.5$ . Dla każdego  $g$  istnieje pasmo stanów o energii  $E_r > 0$  (na czerwono) opisujących parę swobodnych cząstek. Dla  $g < 0$  istnieją ponadto stany związane o energii  $E_r < 0$  (na niebiesko i zielono). Liniami ciągłymi (kreskowanymi) oznaczono stany związane, których funkcje falowe  $\phi_r(r)$  są symetryczne (antysymetryczne) wokół  $r = 0$ . Kształt funkcji falowych  $\phi_r(r)$  schematycznie przedstawiono obok odpowiadających im energii. Energie podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

do grupy pierwszej nie tworzą one gęstego pasma. Ich funkcje falowe  $\phi_r(r)$ , o gęstości skupionej w pobliżu  $r = 0$ , opisują stany dwóch związanych cząstek. Stany te pojawiają się jedynie dla ujemnych sił oddziaływań  $g < 0$ .

Funkcje falowe  $\phi_r(r)$  mają dobrze zdefiniowaną symetrię w  $r$  i są to funkcje parzyste bądź nieparzyste:  $\phi_r(-r) = \pm\phi_r(r)$ . Poniżej  $g < 0$  pojawia się jeden stan związany (ciągła linia niebieska) o funkcji falowej  $\phi(r)$  symetrycznej w  $r$ . W miarę, jak przechodzimy do coraz silniejszych oddziaływań przyciągających, w widmie pojawiają się kolejne stany związane. Stany te mają funkcje falowe na przemian antysymetryczne i symetryczne. Można przewidzieć, że w granicy  $g \rightarrow -\infty$  (w której potencjał przybiera postać nieskończonej studni) liczba stanów związanych staje się nieskończona. Odstępy między wartościami  $g$ , dla których pojawiają się nowe stany związane, zależą od  $w$ . W miarę, jak maleje  $w$ , odstępy te rosną i w granicy  $w \rightarrow 0$ , gdzie potencjał jest praktycznie równoważny potencjałowi kontaktowemu, występować będzie tylko jeden symetryczny stan związany.

Możemy teraz wykorzystać te wyniki do opisanego widma pełnego, wielociałowego

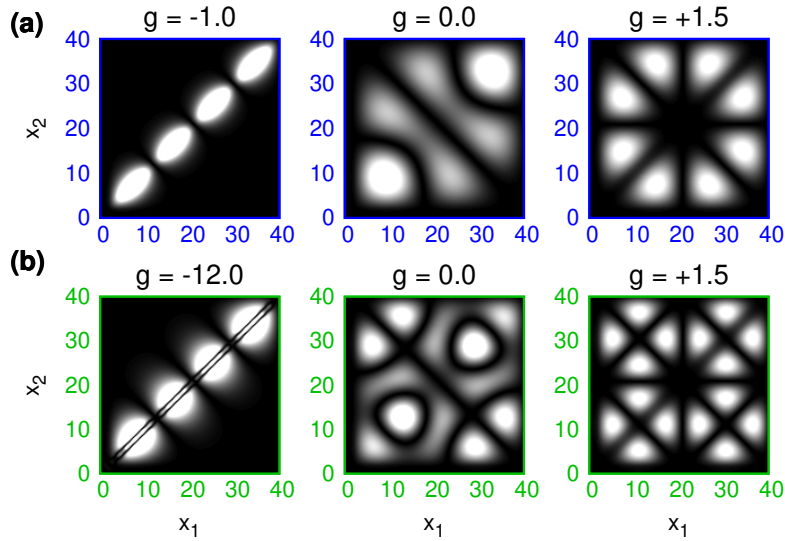




**Rysunek 26:** Widmo energii własnych hamiltonianu wielociałowego (3.1) dla  $N = 2$  bozonów, w zależności od siły oddziaływań  $g$ , dla zasięgu oddziaływań (a)  $w = 0.5$ , (b)  $w = 1.5$ . (Można porównać z widmem dla przypadku oddziaływań kontaktowych, rys. 3 na str. 9.) Wśród stanów własnych wyróżnić można dwie główne grupy. Pierwsza z nich (oznaczona na niebiesko) zawiera stany, które dla  $g > 0$  opisują cząstki niezależne, ale dla  $g < 0$  opisują związane pary bozonów z energią silnie zależną od  $g$ . Druga z nich (na zielono) zawiera stany, które powyżej pewnej wartości  $g$  (innej od zera) opisują cząstki niezależne, a poniżej tej wartości  $g$  opisują związane pary w stanie wzbudzone. Pozostałe stany oznaczono na czerwono. Kółka na wykresie (b) wskazują energie stanów własnych, których funkcje falowe dla różnych  $g$  przedstawiono na rys. 27. Obliczeń dokonano dla układu ograniczonego do obszaru  $x \in [-4, 40]$ . Energie podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

hamiltonianu  $H$ . Na rys. 26 przedstawiono energie wielociałowych stanów własnych hamiltonianu (3.1) w zależności od  $g$ , obliczone numerycznie dla dwóch wartości zasięgu oddziaływań  $w = 0.5$  oraz  $w = 1.5$ . Ogólna struktura tego widma przypomina tę, którą znamy już z wcześniejszych wyników dla dwóch bozonów oddziałujących kontaktowo (patrz rys. 3a na str. 9).

W przypadku bozonów oddziałujących kontaktowo wyróżnić można było pojedynczą grupę stanów, których funkcje falowe miały postać związanych par dla  $g < 0$ , a ich



**Rysunek 27:** (a) Gęstość dwuciałowa  $\rho_2(x_1, x_2)$  dla jednego ze stanów własnych hamiltonianu (3.1) z zasięgiem oddziaływań  $w = 1.5$ , w zależności od siły oddziaływań  $g$ . Energię tego stanu dla danych  $g$  oznaczono na rys. 26 niebieskimi symbolami. Dla  $g \geq 0$  stan ten w przybliżeniu opisuje parę cząstek o funkcjach falowych swobodnych cząstek, ale dla  $g < 0$  opisuje on związaną parę bozonów (o gęstości skupionej blisko  $x_1 = x_2$ ). (b) Gęstość dwuciałowa  $\rho_2(x_1, x_2)$  dla jednego ze stanów własnych hamiltonianu (3.1) z zasięgiem oddziaływań  $w = 1.5$ , w zależności od siły oddziaływań  $g$ . Energię tego stanu dla danych  $g$  oznaczono na rys. 26 zielonymi symbolami. Dla  $g \gtrsim -11$  stan ten w przybliżeniu opisuje parę cząstek o funkcjach falowych swobodnych cząstek, ale dla  $g \lesssim -11$  opisuje on związaną parę bozonów w stanie wzbudzonym. Siłę oddziaływań podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , położenie w jednostkach  $\sqrt{\hbar / m \Omega}$ .

energie przybierały dla  $g < 0$  quasi-paraboliczną zależność od  $g$ . W przypadku układu oddziałującego potencjałem skończonego zasięgu występuje zauważalna różnica. Tym razem bowiem, jak wiemy z analizy widma hamiltonianu ruchu względnego  $H_r$ , istnieją także i wzbudzone stany związanych par. Każdemu stanowi związanemu istniejącemu w widmie  $H_r$  (o odpowiedniej dla bozonów symetrii funkcji falowej) odpowiada określona grupa stanów w widmie hamiltonianu wielociałowego  $H$ . Tak więc wyróżnić można grupę stanów (zaznaczoną na rys. 26 na niebiesko), które dla  $g < 0$  opisują dwa związane bozony w stanie podstawowym i mają energię  $E_r(g) + K^2/4$ , gdzie  $K$  jest pędem środka masy, a  $E_r(g)$  odpowiednią energią własną hamiltonianu  $H_r$ . Rozkład gęstości dwuciałowej jednego ze stanów własnych z tej grupy zobaczyć można na rys. 27a. Gdy schodzimy w stronę silniejszych przyciągań, dochodzimy do krytycznej wartości siły oddziaływań  $g_{\text{crit}}$ , dla której w widmie  $H_r$  pojawia się kolejny, wzbudzony stan związany o odpowiedniej symetrii. Wartość ta wynosi  $g_{\text{crit}} \approx -28$  dla  $w = 0.5$  i  $g_{\text{crit}} \approx -11$  dla  $w = 1.5$  (patrz rys. 25). Zarazem w widmie hamiltonianu wielociałowego  $H$  zauważyć można kolejną grupę stanów (zaznaczonych na zielono), które dla  $g < g_{\text{crit}}$  mają quasi-paraboliczną zależność energii od  $g$ . Opisują one pary bozonów we wzbudzonym stanie związanym. Można to potwierdzić na podstawie rozkładu gęstości dwuciałowej jednego ze stanów własnych z tej grupy, który ukazano na rys. 27b. Widzimy, że dla  $g < g_{\text{crit}}$  stan ten faktycznie opisuje parę związanych bozonów w stanie o wyższej energii (widoczne węzły wokół diagonal  $x_1 = x_2$ ).

Pozostałe stany na rys. 26 (zaznaczone na czerwono) dla ukazanego na ilustracji zakresu  $g$  mają energię prawie niezależną od oddziaływań i zachowują naturę swobodnych cząstek. Jednak w miarę przechodzenia do coraz silniejszych przyciągań pojawiać się będą kolejne wzbudzone stany związane  $H_r$ , a tym samym w widmie  $H$  będzie się dało wyróżnić coraz więcej odrębnych grup odpowiadających tym stanów. Ponieważ dla  $g \rightarrow -\infty$  w widmie  $H_r$  może pojawić się nieograniczona liczba stanów związanych, możemy przypuszczać, że w zasadzie wszystkie stany własne hamiltonianu (3.1) dla dostatecznie silnych przyciągań przekształcą się w stany związanych par.

Porównując widmo hamiltonianu wielociałowego z przypadkiem dla bozonów oddziałujących kontaktowo, widzimy, że w pobliżu  $g = 0$  zachowują się one w sposób bardzo podobny – tj. dla  $g > 0$  dostępne są tylko stany swobodnych cząstek, zaś stany związanych par pojawiają się dla  $g < 0$ . Najważniejszą różnicą jest fakt, że energia wiązania  $E_r(g)$  tych stanów jest różna w zależności od wartości zasięgu  $w$ . Dla silnych oddziaływań przyciągających dostępne są także wzbudzone stany związanych par bozonowych. Niemniej jednak (dla interesującego nas zakresu  $w \leq 1.5$ ) te stany wzbudzone pojawiają się dopiero dla przyciągań o bardzo dużej sile. Można zatem przewidzieć, że dla niezbyt silnych oddziaływań nie wywierają one wpływu na właściwości dynamiczne układu.

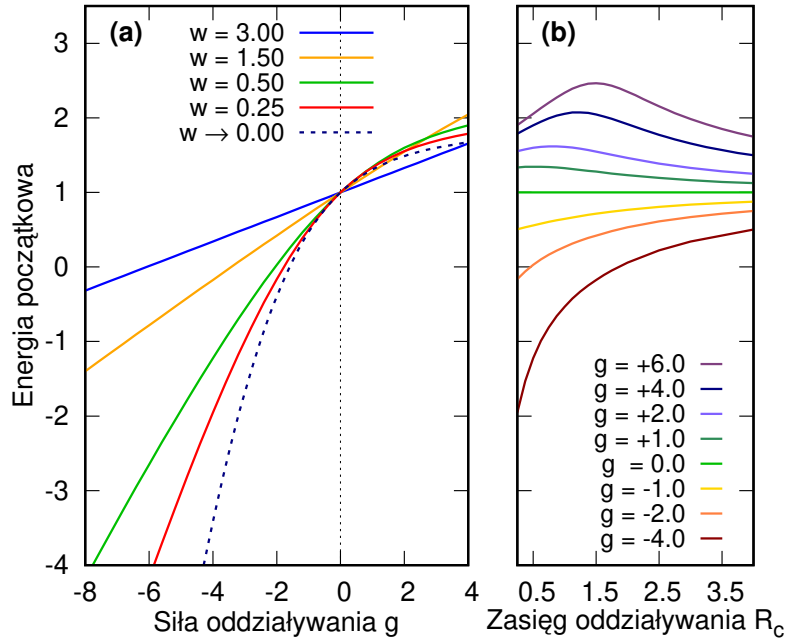
### 3.3 Stan początkowy układu

Postępując analogicznie, jak w poprzednim rozdziale, za stan początkowy układu  $\Psi(t = 0)$  przyjmujemy stan podstawowy dwóch bozonów oddziałujących potencjałem  $U(r)$  i umieszczonych w studni oscylatora harmonicznego. Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia dla wybranego potencjału oddziaływania nie jest dostępne, zatem odpowiedni stan podstawowy znajdujemy metodami numerycznymi przez propagację funkcji próbnej w czasie urojonym. Warto wspomnieć, że można uzyskać ścisłe rozwiązanie dla zbliżonego potencjału oddziaływania o kształcie funkcji prostokątnej [114]. Otrzymane na drodze numerycznej energie układu są zbliżone do wyników analitycznych uzyskanych w cytowanej pracy.

Teraz przyjrzyjmy się energii stanu początkowego. Na rys. 28 ukazano energię początkową  $E_2(g, w)$  układu dwóch bozonów w zależności od siły oddziaływań  $g$ , dla różnych wartości zasięgu oddziaływań  $w$ . Dla porównania ukazujemy także energię  $E_2(g, w)$  dla dwóch bozonów z oddziaływaniami kontaktowymi  $g\delta(r)$  (linia przerywana).

Na rys. 28a ukazano energię początkową  $E_2(g, w)$  układu dwóch bozonów w zależności od siły oddziaływania  $g$ , dla danych wartości zasięgu oddziaływania  $w$ . Dla porównania ukazujemy także energię  $E_2(g, w)$  dla dwóch bozonów z oddziaływaniami kontaktowymi  $g\delta(r)$  (linia przerywana).

Podobnie jak w przypadku oddziaływań kontaktowych, energia rośnie monotonicznie wraz z  $g$ , przy czym wartość  $w$  ma wpływ na szybkość tego wzrostu energii. W granicy  $w \rightarrow 0$  energia  $E_2(g, w)$  jest w przybliżeniu taka sama, jak dla układu bozonów oddziałujących kontaktowo. Wraz ze wzrostem  $w$  energia staje się w ogólności coraz mniej czuła na wartość  $g$ , tj. zmniejsza się nachylenie  $E_2(g, w)$  w pobliżu punktu  $g = 0$ . Choć w tej rozprawie skupiamy się tylko na zasięgach oddziaływań w zakresie  $w \leq 1.5$ , należy zauważyć, że w granicy oddziaływań o nieskończonym zasięgu ( $w \rightarrow \infty$ ) potencjał oddziaływań  $U(r)$  znika, a energia  $E_2$  przybiera wartość jak dla nieoddziałującego układu  $E_2 = 1$ . Wynika to z faktu, że dla  $w \gg 1$  oddziaływanie jest odczuwane przez cząstki jedynie jako stała w przestrzeni poprawka do energii, o wartości  $g/(2w)$ . W granicy  $w \rightarrow \infty$  poprawka ta zmierza do zera dla wszystkich skończonych  $g$ .



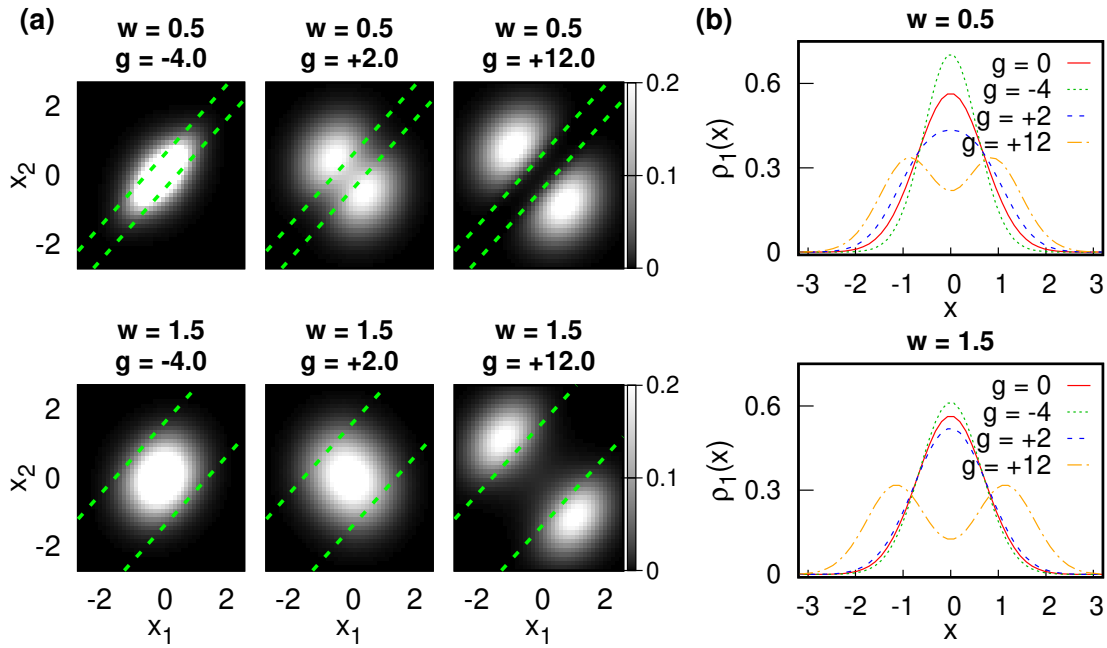
**Rysunek 28:** (a) Energia stanu podstawowego  $E_2(g, w)$  dwóch bozonów w pułapce harmoniczej oddziałujących potencjałem  $U(r)$ , zależnie od siły oddziaływań  $g$ . Wyniki pokazano dla różnych zasięgów oddziaływań  $w$ . (b) Energia stanu podstawowego dwóch bozonów zależnie od zasięgu oddziaływań  $w$ , przy stałej sile oddziaływań  $g$ . Energię podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , zasięg  $w$  w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ .

Zwróćmy jeszcze uwagę, że dla bardzo dużych wartości  $g$  energia układu staje się wyższa od wysokości bariery  $\lambda = 1.5$ , przez którą tunelują cząstki. Dlatego też w dalszej analizie dynamiki układu ograniczymy się do oddziaływań o sile  $g \lesssim +2$ , dla których energia uciekających cząstek nie przekracza jeszcze wysokości bariery.

Spójrzmy z kolei na zależność energii układu od zasięgu oddziaływań  $w$ . Na rys. 28b ukazano, jak zmienia się energia  $E_2(g, w)$  w miarę regulacji  $w$  przy zachowaniu stałej wartości  $g$ . Widać, że dla oddziaływań przyciągających ( $g < 0$ ) energia rośnie monotonicznie wraz z  $w$ . Inaczej jest dla oddziaływań odpychających ( $g > 0$ ), gdzie zależność  $E_2(g, w)$  od  $w$  nie jest monotoniczna: energia w ogólności rośnie aż do chwili osiągnięcia maksimum, po czym zaczyna spadać. Jednak, niezależnie od siły oddziaływań, energia dla dużych  $w$  zbiega do granicznej wartości  $E_2 = 1$ .

Aby lepiej zrozumieć zależność energii od zasięgu oddziaływań, rozważmy rozkład gęstości w stanie podstawowym. Na rys. 29 ukazano, jak zmienia się rozkład gęstości stanu początkowego (tj. dwuciałowy profil gęstości  $\rho_2(x_1, x_2)$  oraz profil jednociąłowy  $\rho_1(x)$ ) w zależności od siły oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ . Liniami kreskowanymi zaznaczono obszar dwuciałowej przestrzeni konfiguracyjnej, dla którego  $|x_1 - x_2| \leq w$ , tzn. bozony znajdują się w odległości mniejszej niż  $w$ . Wyniki te można porównać z analogicznym rysunkiem dla przypadku oddziaływań kontaktowych (rys. 5 ze str. 13). Profil gęstości w przypadku nieoddziałującym ( $g = 0.0$ ) jest oczywiście taki sam w obu przypadkach.

Jak widać, dla względnie małego zasięgu oddziaływań  $w = 0.5$  wpływ oddziaływań na wygląd stanu początkowego jest podobny do przypadku oddziaływań kontaktowych. Dla oddziaływań przyciągających ( $g = -4$ ) prawdopodobieństwo znalezienia bozonów



**Rysunek 29:** (a) Rozkład gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2)$  stanu podstawowego układu dwóch bozonów oddziałujących potencjałem  $U(r)$ , dla różnych wartości siły oddziaływań  $g$  oraz zasięgu oddziaływań  $w$ . Zielone linie kreskowane wyznaczają granice obszaru  $|x_1 - x_2| \leq w$ . (b) Rozkład gęstości jednociłowej  $\rho_1(x)$  stanu podstawowego układu dwóch bozonów dla różnych wartości  $g$  i  $w$ . Położenie i zasięg  $w$  podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ .

w odległości mniejszej niż zasięg  $w$  oddziaływania rośnie, a dwuciałowy profil gęstości wydłuża się wzdłuż diagonal  $x_1 = x_2$ . Z kolei dla oddziaływań odpychających ( $g = +2$ ) prawdopodobieństwo znalezienia bozonów blisko siebie maleje, a dla dostatecznie silnego odpychania ( $g = +12$ ) gęstość w obszarze  $|x_1 - x_2| \leq w$  jest praktycznie zerowa. Oddziaływania mają też zauważalny wpływ na kształt profilu jednociłowego  $\rho_1$ . Tak, jak dla oddziaływań kontaktowych, staje się on węższy (szerszy) dla oddziaływań przyciągających (odpychających).

Dopiero dla większego zasięgu oddziaływań,  $w = 1.5$  (drugi rząd na rys. 29), pojawiają się zauważalne różnice w stosunku do bozonów oddziałujących kontaktowo. W tym przypadku funkcja falowa nieoddziałującego stanu podstawowego mieści się niemal w całości w obszarze  $|x_1 - x_2| \leq w$ . W tym obszarze odczuwana wartość potencjału oddziaływania jest w przybliżeniu stała. Powoduje to, że dla oddziaływań przyciągających ( $g = -4$ ), jak również odpychających o względnie małej sile ( $g = +2$ ), oddziaływania mają niewielki wpływ na rozkład przestrzenny bozonów, wobec czego profil gęstości pozostaje bardzo podobny do tego w stanie nieoddziałującym. Dopiero silne oddziaływania odpychające ( $g = +12$ ) pozwalają na opuszczenie obszaru  $|x_1 - x_2| \leq w$  i rozepchnięcie gęstości w stronę brzegów studni. Następuje niemal całkowita separacja między cząstkami, tj. prawdopodobieństwo znalezienia obydwu bozonów po tej samej stronie studni staje się bliskie zero.

Teraz można lepiej zrozumieć zachowanie energii układu w funkcji  $w$ , które ukazaliśmy wcześniej na rys. 28b. Dla oddziaływań przyciągających ( $g < 0$ ) wzrost  $w$  powoduje, że profil gęstości jest mniej silnie ściskany. Dla oddziaływań odpychających ( $g > 0$ ) wzrost  $w$  z początku powoduje rozepchnięcie bozonów w stronę dalszych rejonów studni

harmonicznej, przez co energia układu wzrasta. Jednak po przekroczeniu pewnego zasięgu oddziaływań, energia oddziaływania dla danego  $g$  już nie jest wystarczająco wysoka, by rozepchnąć bozony na odległość  $\sim w$ . Wtedy cząstki zaczynają się koncentrować w obszarze  $|x_1 - x_2| < w$  i energia układu zaczyna spadać. Zarówno dla oddziaływań przyciągających, jak i odpychających, dla dużego zasięgu oddziaływań profil stanu początkowego jest identyczny z nieoddziaływającym.

## 3.4 Dynamika po otwarciu studni

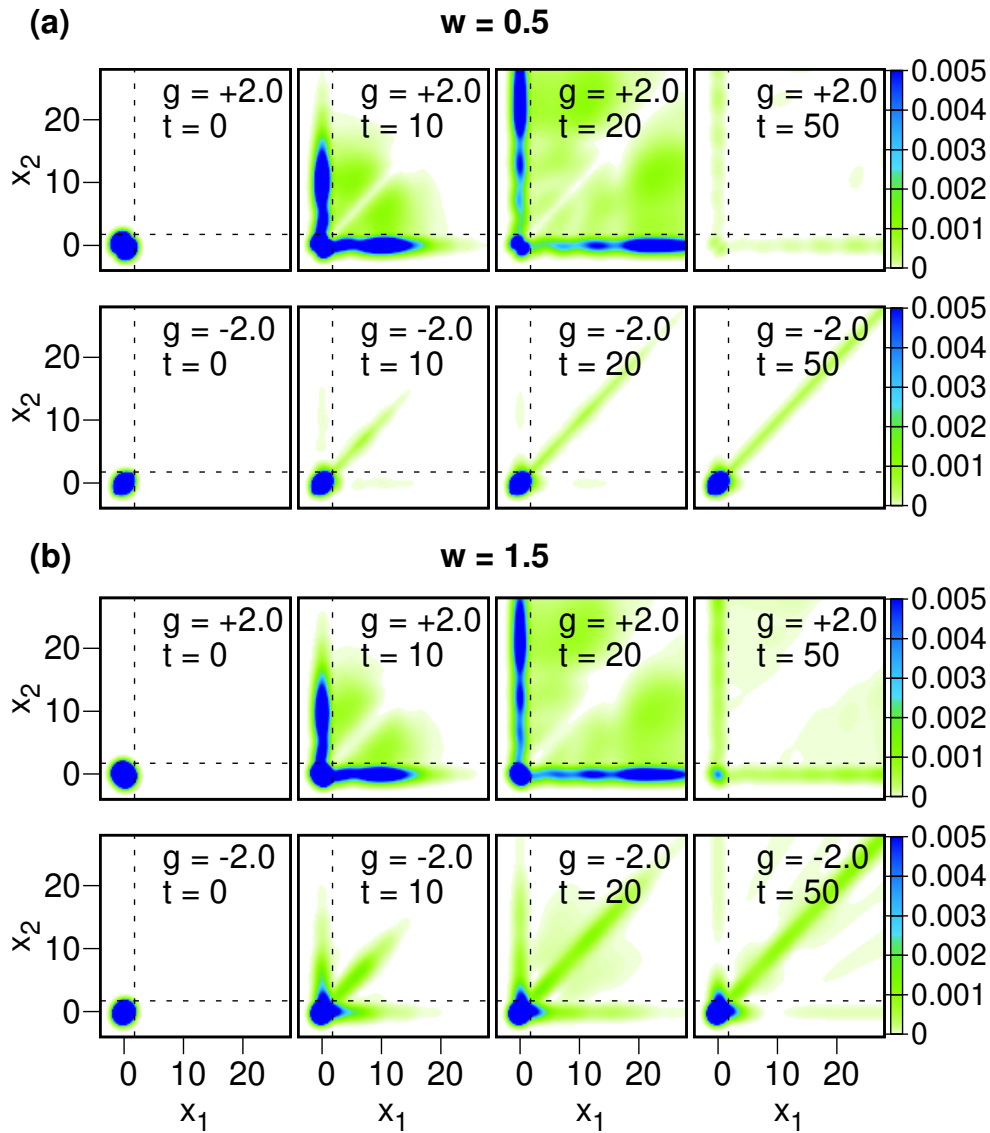
### 3.4.1 Ewolucja gęstości prawdopodobieństwa

Aby przeanalizować dynamikę tunelowania dwóch bozonów oddziałujących potencjałem o skończonym zasięgu, wykorzystamy ponownie techniki, które zastosowano w poprzednim rozdziale. Zaczniemy od przyjrzenia się ewolucji gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2; t)$  po otwarciu studni. Na rys. 30 ukazano  $\rho_2(x_1, x_2; t)$  w różnych chwilach  $t$  dla oddziaływań odpychających ( $g = +2$ ) oraz przyciągających ( $g = -2$ ), oraz dla dwóch różnych zasięgów oddziaływań  $w = 0.5, w = 1.5$ . Tak, jak poprzednio, linia kreskowana na ilustracji wyznacza granicę studni  $x_w = \sqrt{3}$  i dzieli przestrzeń konfiguracyjną na trzy obszary  $P_2, P_1, P_0$ . Wyniki można porównać z ewolucją gęstości dla układu oddziałującego kontaktowo (rys. 7 na str. 15). Zachowanie układu okazuje się być w obu przypadkach podobne.

Dla oddziaływań odpychających ( $g = +2$ ) dynamika  $\rho_2$  pozostaje bardzo podobna do przypadku bozonów oddziałujących kontaktowo. Gęstość prawdopodobieństwa płynie bezpośrednio z obszaru  $P_2$  do  $P_1$ , a stąd do  $P_0$ , co wskazuje, że dynamiką rządzi proces tunelowania sekwencyjnego. Bozony przebywają z dala od siebie, o czym świadczy zanik gęstości prawdopodobieństwa wokół diagonal  $x_1 = x_2$ . Zmiana zasięgu oddziaływań  $w$  w tym przypadku ma tylko nieznaczny wpływ na dynamikę  $\rho_2$ .

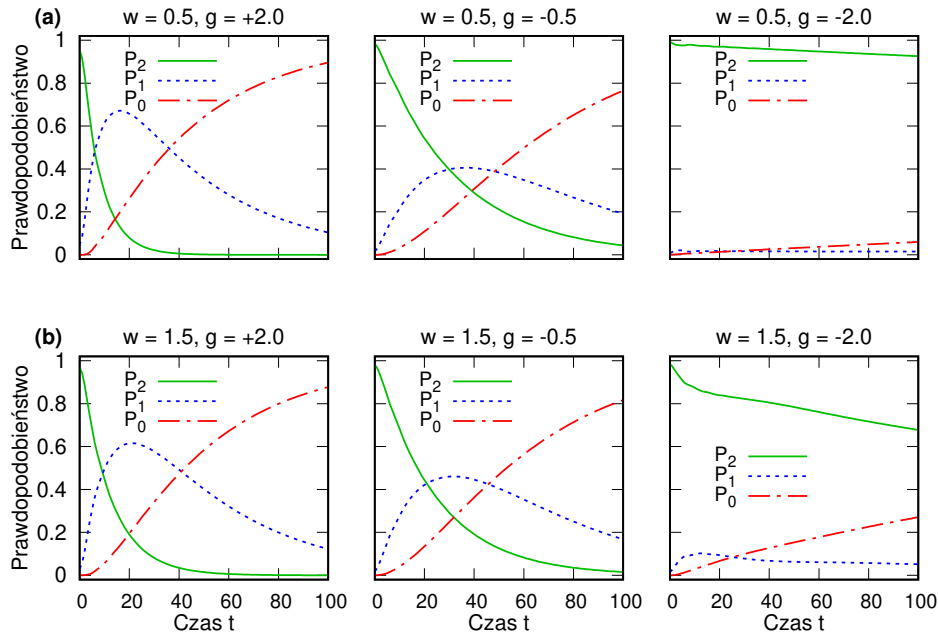
Przejdźmy teraz do przypadku oddziaływań przyciągających ( $g = -2$ ). Dynamika zmienia się wówczas w sposób podobny, jak dla oddziaływań kontaktowych. Dla  $g = -2, w = 0.5$  praktycznie cały proces tunelowania zachodzi przez emisję pary bozonów. Znaczna część gęstości przepływa bezpośrednio z obszaru  $P_2$  do  $P_0$ , a gęstość pozostaje skupiona wokół diagonal  $x_1 = x_2$ . Dla  $g = -2, w = 1.5$  tunelowanie par także gra dominującą rolę, jednak tunelowanie sekwencyjne jest bardziej nasilone niż dla  $w = 0.5$ . Można to wytłumaczyć następująco. Jak zauważyliśmy w podrozdziale 2.5 (str. 22), tłumienie tunelowania sekwencyjnego wiąże się ze spadkiem całkowitej energii układu poniżej określonego progu. Ponieważ dla większego  $w$  energia układu dwóch przyciągających bozonów staje się mniej czuła na wartość  $g$  (jak pokazano wcześniej na rys. 28a ze str. 42), tunelowanie sekwencyjne jest tłumione w mniejszym stopniu. Świadczy to, że naturą tunelowania można sterować nie tylko przez regulację siły oddziaływań  $g$ , ale też zasięgu oddziaływań  $w$ .

Kończąc tę część analizy, przyjrzyjmy się jeszcze ewolucji prawdopodobieństwa  $\mathcal{P}_n(t)$  dla różnych wartości  $g$  oraz  $w$  (rys. 31). Warto porównać ją z analogicznymi wynikami dla bozonów oddziałujących kontaktowo (rys. 8 ze str. 16). Jasno widać, że ewolucja  $\mathcal{P}_n(t)$  przebiega w praktycznie identyczny jakościowo sposób jak w tamtym przypadku, nawet dla większego zasięgu oddziaływań  $w = 1.5$ . W szczególności, tak samo, jak dla oddziaływań kontaktowych, dla wyższych wartości  $g$  ewolucja  $\mathcal{P}_n(t)$  przebiega w sposób zgodny z dominacją tunelowania sekwencyjnego, zaś dla silnych przyciągań tunelowanie par jest jedynym dostępnym procesem ewolucji ( $\mathcal{P}_1(t)$  pozostaje cały czas bliskie zera).



**Rysunek 30:** Ewolucja w czasie rozkładu gęstości  $\rho_2(x_1, x_2, t)$  dla układu dwóch bozonów oddziałujących potencjałem  $U(r)$ , po otwarciu studni w chwili  $t = 0$ . Ukazano wyniki dla różnych wartości siły oddziaływań  $g = +2, -2$  i zasięgu oddziaływań  $w$ : (a) dość małego zasięgu  $w = 0.5$  i (b) większego zasięgu  $w = 1.5$ . Linie kreskowane oznaczają granicę studni  $x_w \approx \sqrt{3}$  i dzielą przestrzeń konfiguracyjną na trzy różne obszary  $P_i$ . Odległości i zasięg oddziaływań podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ .

Warto jednak zwrócić uwagę, że zmiana zasięgu oddziaływań  $w$  ma pewien wpływ na ewolucję prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n(t)$ . W przypadku oddziaływań przyciągających ( $g = -0.50, g = -2.00$ ) zwiększenie zasięgu oddziaływań z  $w = 0.5$  do  $w = 1.5$  (przy zachowaniu tej samej wartości  $g$ ) sprawia, że spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  staje się szybszy, a  $\mathcal{P}_1(t)$  przybiera wyższą wartość w maksimum (tj. prawdopodobieństwo znalezienia pojedynczego bozonu w studni jest większe). Jest to zgodne z tym, co zauważyliśmy wcześniej: tunelowanie sekwencyjne, które jest znacznie szybsze od tunelowania par, jest tłumione w mniejszym



**Rysunek 31:** Ewolucja w czasie prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n(t)$  znalezienia dokładnie  $n$  cząstek w studni, dla układu dwubozonowego o różnej sile oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ . Wyniki pod względem jakościowym są praktycznie takie same, co dla przypadku oddziaływań kontaktowych (można porównać z rys. 8 ze str. 16). Czas podano w jednostkach  $1/\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega}/m$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

stopniu dla większych wartości zasięgu oddziaływań  $w$ .

Dla oddziaływań odpychających ( $g = +2.0$ ) mamy do czynienia z efektem odwrotnym. W tym przypadku zwiększenie zasięgu oddziaływań powoduje, że spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  staje się wolniejszy, a  $\mathcal{P}_1(t)$  przybiera mniejszą wartość w maksimum. Jest to również efekt związany z energią układu. Dla  $g = +2$ , wzrost zasięgu oddziaływań z  $w = 0.5$  do  $w = 1.5$  powoduje spadek całkowitej energii (jak pokazano na rys. 28 ze str. 42), przez co pierwszy tunelujący bozon widzi wyższą efektywną barierę i tuneluje wolniej.

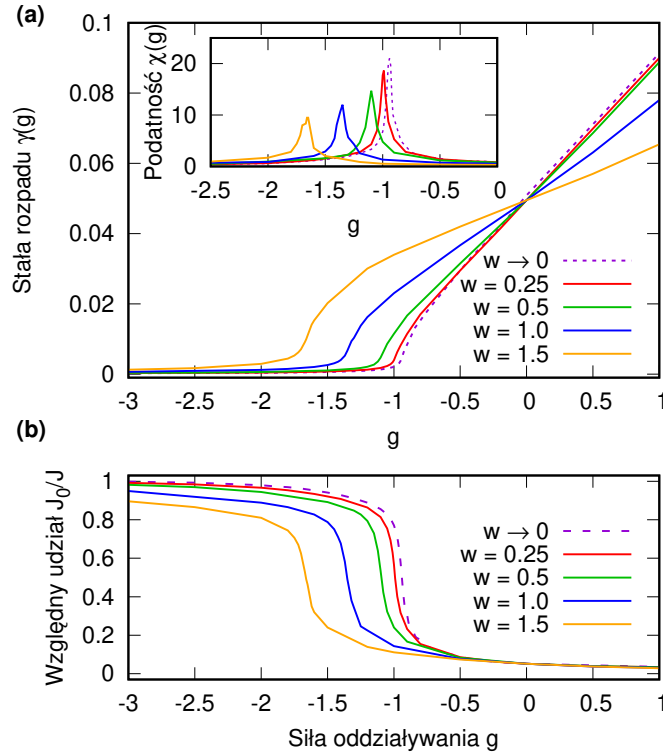
### 3.4.2 Stała rozpadu i udział tunelowania par

Aby dokładniej zrozumieć, jak wygląda przejście między dominacją różnych procesów tunelowania, przeanalizujemy teraz zachowanie stałej rozpadu  $\gamma$  oraz scałkowanych prądów prawdopodobieństwa  $J(t)$ ,  $J_1(t)$  i  $J_0(t)$ . Wielkości te zdefiniowane są tak samo jak w podrozdziale 2.4.1 i można je wyliczyć w identyczny sposób, jak dla układu z oddziaływaniami kontaktowymi.

Na rys. 32a przedstawiono wartość stałej rozpadu  $\gamma(g)$  w funkcji siły oddziaływań  $g$ , a także podatność  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$ , dla różnych wartości zasięgu oddziaływań  $w$ . Na rys. 32b przedstawiono z kolei względny udział tunelowania par  $J_0/J$ . Dla porównania ukazano także odpowiednie wielkości dla przypadku oddziaływań kontaktowych. Widzimy dzięki temu, że dynamika układu zbiega do granicy oddziaływań kontaktowych w miarę, jak  $w$  zmierza do zera.

Można zobaczyć, że wszystkie ukazane wielkości zachowują się w sposób podobny, co w granicy oddziaływań kontaktowych. W szczególności dla każdego  $w$  można wyróżnić

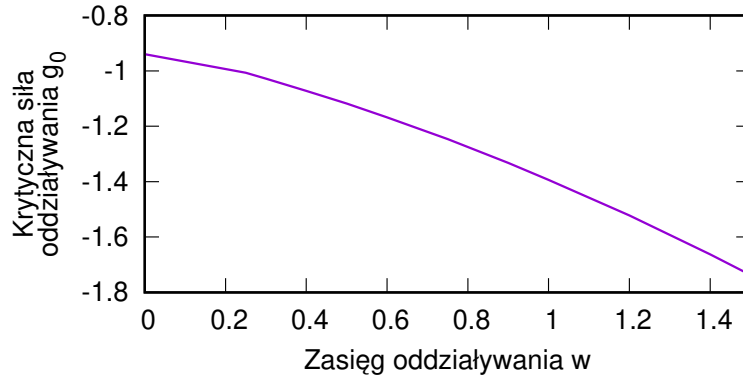




**Rysunek 32:** (a) Stała rozpadu  $\gamma(g)$  dla  $\mathcal{P}_2(t)$  jako funkcja siły oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ , dla układu dwóch bozonów. Wstawka: Podatność  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$ . (b) Stosunek  $J_0/J$ , wyrażający względny udział tunelowania par w ogólnej dynamice tunelowania układu dwubozonego, w zależności od siły oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ . Ukazano także wartość tych wielkości dla układu z oddziaływaniami kontaktowymi (o postaci funkcji  $\delta$ ). Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , stała rozpadu w jednostkach  $\Omega$ , podatność w jednostkach  $\sqrt{m/\hbar^3\Omega}$ .

konkretną wartość siły oddziaływań  $g$ , dla której następuje nagła zmiana w zależności  $\gamma$  od  $g$  oraz pojawia się ostry pik w  $\chi(g)$ . Dla tej samej wartości następuje przejście układu między dwoma reżimami, co widać z analizy względnego udziału prądów,  $J_0/J$ . Ten punkt przejścia możemy oznaczyć jako  $g_0$  i można go jednoznacznie zdefiniować jako wartość  $g$ , dla której energia układu dwóch bozonów spada poniżej energii pojedynczej cząstki:  $E_2(g_0) = 0.5$ .

Widzimy, że wraz ze wzrostem zasięgu  $w$  stała rozpadu  $\gamma$  staje się coraz mniej czuła na zmiany  $g$  (zmniejsza się nachylenie  $\gamma(g)$  w punkcie  $g = 0$ ). Skutkuje to tym, że dla  $g < 0$  stała rozpadu rośnie wraz ze wzrostem  $w$ , zaś dla względnie niewielkich  $g > 0$  maleje (podobnie, jak zauważyliśmy wcześniej przy analizie ewolucji  $P_n(t)$ ). Następuje także przesunięcie wartości krytycznej  $g_0$ , która w granicy  $w \rightarrow 0$  zbiega do wartości  $g_0 \rightarrow -0.94$ . Wraz ze wzrostem  $w$  przesuwają się one w stronę silniejszych oddziaływań. (Zależność  $g_0$  od  $w$  można zobaczyć na rys. 33). Warto także zwrócić uwagę na wysokość maksimum w  $\chi(g)$ . Wysokość tych pików można w przybliżeniu interpretować jako odzwierciedlenie tego, jak gwałtowna jest zmiana zachowania  $\gamma(g)$  w krytycznym punkcie  $g_0$ . Widzimy, że dla wzrastającego  $w$  wysokość tych pików spada. Widzimy zatem, że zmiana  $w$  ma wpływ nie tylko na położenie punktu przejścia  $g_0$  między dwoma reżimami, ale i na łagodność tego przejścia.



**Rysunek 33:** Wartość krytycznej siły oddziaływań  $g_0$ , w której następuje przejście między reżimami tunelowania par a tunelowania sekwencyjnego, w zależności od  $w$  (obliczona jako wartość siły oddziaływań, dla której  $E_2(g_0) = 0.5$ ). Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

Wszystkie te efekty można traktować jako odzwierciedlenie podobnej zależności dla energii układu (w pobliżu  $g = 0$ , im  $w$  wyższe, tym energia  $E_2(g, w)$  jest mniej czuła na zmiany  $g$ ). Zgodnie z naszym wyjaśnieniem fenomenologicznym (podrozdział 2.5, str. 22) wartość  $g_0$  równa jest w przybliżeniu sile oddziaływań, dla której  $E_2(g) < E_1$ . Tak więc przesuwanie się  $g_0$  dla wzrastającego zasięgu oddziaływań wynika bezpośrednio ze słabnącej zależności  $E_2(g)$  od  $g$ , tj. dla wyższego  $w$  trzeba większej siły oddziaływań, żeby stłumić tunelowanie sekwencyjne w takim samym stopniu. W granicy  $w \rightarrow \infty$  wartość  $g_0$  zmierza do minus nieskończoności. Wynika to z faktu, że, jak wspominaliśmy, w granicy  $w \rightarrow \infty$  energia układu zbiega do wartości  $E_2(g) = 1 + g/(2w)$ , tak więc wartość krytycznego punktu  $g_0$ , w którym  $E_2(g_0) = 0.5$ , wynosi w tej granicy  $g_0 = -w$ .

W tym miejscu warto zauważyć, że powyższe rozważania mają znaczenie dla praktyki eksperymentalnej. Wskazują one bowiem kolejną drogę do bardziej kompletnej kontroli doświadczalnej nad właściwościami tunelującego układu. Przez zmianę parametru  $w$  można bowiem regulować wartość krytycznej siły oddziaływań  $g_0$ , przy której następuje zmiana charakteru tunelowania z sekwencyjnego na tunelowanie par. Z drugiej strony, doświadczalne ustalenie krytycznej wartości  $g_0$  może pomóc w wyznaczeniu efektywnego zasięgu oddziaływań  $w$ .

Podsumowując, dla zbadanych przez nas wartości zasięgu oddziaływań  $w > 0$  układ dwóch bozonów zachowuje się w bardzo podobny sposób, co układ bozonów oddziałujących kontaktowo. W szczególności dynamika układu jest w obu przypadkach zdefiniowana przez przejście między dwoma reżimami, które następuje po przekroczeniu krytycznej wartości siły oddziaływań. Najważniejszą różnicą w stosunku do przypadku oddziaływań kontaktowych (z punktu widzenia dynamiki tunelowania) jest fakt, że parametr zasięgu oddziaływań  $w$  pozwala na regulację całkowitej energii początkowej  $E_2(g)$ , co przekłada się na wartości takie jak stała rozpadu  $\gamma(g)$  lub wartość krytycznej siły oddziaływań  $g_0$ .

## Rozdział 4

# Fermiony z oddziaływaniami o skończonym zasięgu

W poprzednich rozdziałach skupialiśmy się na tunelowaniu układów kilku bozonów. Jednak w realizacjach układów ultrazimnych atomów mogą być wykorzystane także atomy fermionowe, np.  ${}^6\text{Li}$  lub  ${}^{40}\text{K}$  [115]. Ze względu na statystykę cząstek układ fermionów różni się znacznie od bozonowego. Zachodzi zatem pytanie, czy dynamika tunelowania dla układu kilku fermionów różniłaby się znacząco od bozonów.

W tym rozdziale analizujemy (podobnie jak dla bozonów) dynamikę układu dwóch identycznych fermionów oddziałujących potencjałem o różnych wartościach siły i zasięgu oddziaływań. Wyniki porównujemy z rezultatami uzyskanymi dla układu bozonów z tymi samymi oddziaływaniami, by przekonać się, jaki wpływ na dynamiczne własności układu ma kwantowa statystyka pomiędzy nierozróżnialnymi cząstkami.

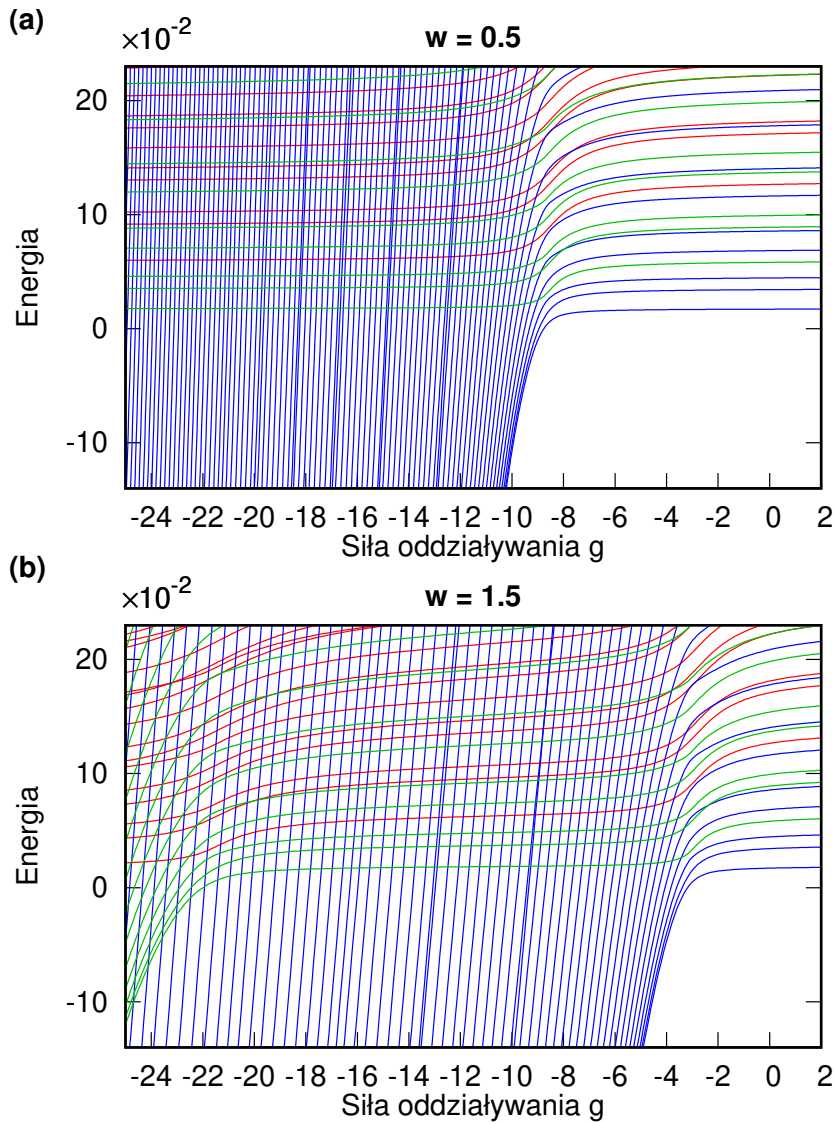
### 4.1 Hamiltonian układu wielociałowego i jego widmo

Rozważamy układ dwóch identycznych fermionów z oddziaływaniami o niezerowym zasięgu. Potencjał oddziaływania  $U(r)$  (3.3) ma tę samą postać, co w poprzednim rozdziale. Hamiltonian będzie zatem miał podobną postać, jak dla dwóch bozonów:

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V_{\lambda=2.5}(x_i) \right] + U(x_1 - x_2). \quad (4.1)$$

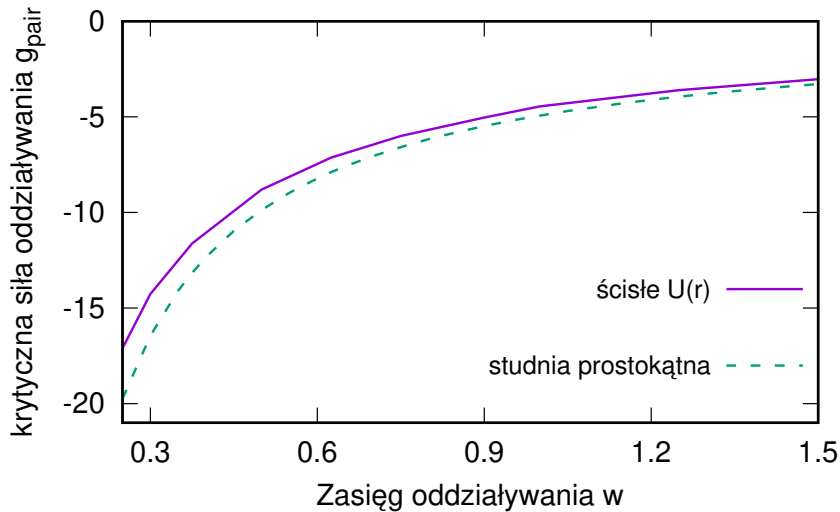
Tym razem jednak, ze względu na fermionową statystykę, rozważamy działanie tego hamiltonianu w podprzestrzeni funkcji falowych antysymetrycznych ze względu na zamianę cząstek. Ta zmiana ma też wpływ na potencjał, w którym przygotowany jest układ. Dwa fermiony nie mogą bowiem znajdować się w tym samym stanie, więc musimy przyjąć większą wartość  $\lambda$ , jeśli chcemy, by wysokość bariery była wyższa niż energia początkowa układu. Dlatego w dalszej analizie przyjmujemy  $\lambda = 2.5$ .

Zacznijmy od krótkiej charakterystyki widma. Na rys. 34 przedstawiono energie wielociałowych stanów własnych hamiltonianu (4.1) dla dwóch fermionów, w zależności od siły oddziaływań  $g$ . Wyniki pokazano dla  $w = 0.5$  oraz  $w = 1.5$ . Warto porównać tę ilustrację z analogicznym widmem dla bozonów (rys. 26b na str. 39). Jak widać, struktura tego widma jest bardzo podobna. Klasyfikacja stanów na poszczególne grupy (oznaczone kolorami: niebieskim, zielonym, czerwonym) pozostaje analogiczna, co w tamtym przypadku. Tutaj zatem zwróćmy uwagę jedynie na różnice w porównaniu z przypadkiem bozonowym.



**Rysunek 34:** Widmo energii własnych hamiltonianu (4.1) dla  $N = 2$  fermionów w zależności od siły oddziaływań  $g$ , dla zasięgu oddziaływań (a)  $w = 0.5$  i (b)  $w = 1.5$ . Oznaczenia stanów kolorami są analogiczne jak na rys. 26. Obliczeń dokonano dla układu ograniczonego do obszaru  $x \in [-4, 40]$ . Energie podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

Najbardziej istotną różnicą jest to, że, o ile dla bozonów stany związanych par pojawiały się już dla  $g < 0$ , dla fermionów pierwsze stany związanych par pojawiają się dopiero dla  $g$  poniżej pewnej wartości  $g_{\text{pair}} < 0$  (zależnej od  $w$ ). Na przykład dla przedstawionych przypadków można zobaczyć, że dla  $w = 0.5$  i  $w = 1.5$  progowa wartość siły oddziaływań to odpowiednio  $g_{\text{pair}} \approx -9$  i  $g_{\text{pair}} \approx -3$ . Jest to bezpośredni skutek tego, że funkcja falowa, opisująca parę identycznych fermionów, musi być antysymetryczna przy zamianie obu cząstek. Jak pamiętamy z dyskusji o widmie hamiltonianu ruchu względnego  $H_r$ , dla potencjału oddziaływań  $U(r)$  pierwszy antysymetryczny stan związany pojawia się dopiero dla odpowiednio silnych oddziaływań przyciągających (patrz widmo stanów własnych  $H_r$ , rys. 25 ze str. 38). Porównując rys. 25 z rys. 34 widzimy, że wartość

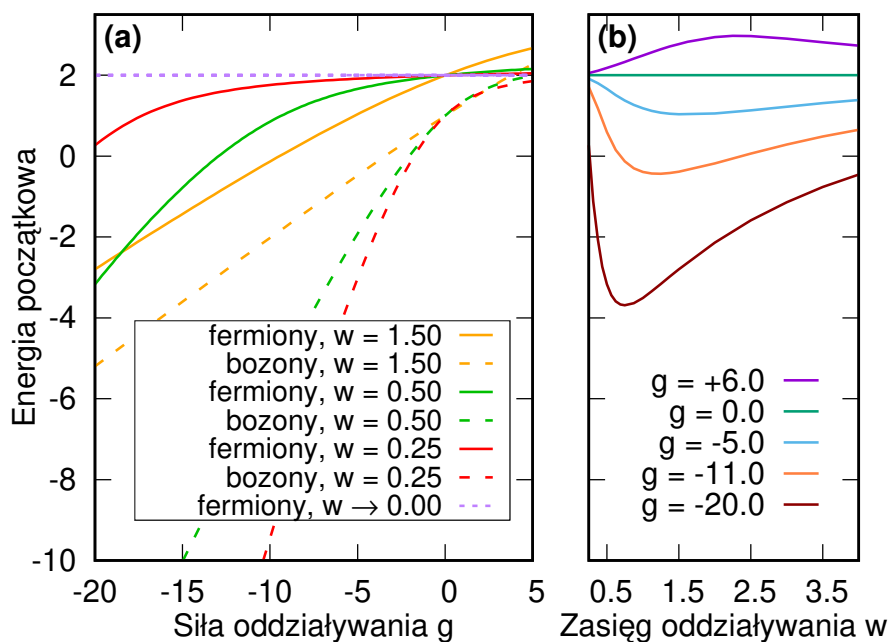


**Rysunek 35:** Krytyczna siła oddziaływania  $g_{\text{pair}}$ , poniżej której w układzie dwóch fermionów może wystąpić łączenie się w pary. Pokazano wyniki obliczone numerycznie dla dokładnego potencjału  $U(r)$  oraz wynik  $g_{\text{pair}} \approx \pi^2/(2w)$  dla modelu, w którym potencjał przybliżono w postaci studni prostokątnej. Energie podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

siły oddziaływań, dla której w widmie  $H_r$  pojawia się pierwszy stan antysymetryczny, jest w przybliżeniu równa właśnie  $g_{\text{pair}}$ .

W istocie wartość  $g_{\text{pair}}$  można przewidzieć dość ściśle, bez konieczności numerycznych obliczeń. Dla uproszczonego hamiltonianu  $H_r$  (3.7), opisującego cząstkę w studni prostokątnej, istnieje ściśle wyrażenie na liczbę stanów związanych [116]. Podstawiając odpowiednie wartości (masa cząstki  $1/2$ , szerokość studni  $2w$ , głębokość studni  $g/(2w)$ ) otrzymujemy wyrażenie na liczbę stanów związanych  $n = \lceil (\sqrt{2|g|w}/\pi) \rceil$ , gdzie  $\lceil \cdot \rceil$  to funkcja zaokrąglenia w górę do najbliższej liczby całkowitej. Zatem warunek na obecność drugiego (antysymetrycznego) stanu związanego to  $\sqrt{2w|g|}/\pi > 1$ , co daje nam wyrażenie  $g_{\text{pair}} \approx \pi^2/(2w)$ . Na rys. 35 porównujemy to wyrażenie z obliczoną numerycznie wartością  $g_{\text{pair}}$  dla potencjału  $U(r)$  ( $g_{\text{pair}}$  definiujemy jako najwyższą wartość  $g$ , dla której w widmie  $H_r$  (3.5) istnieją co najmniej dwa stany o ujemnej energii.) Okazuje się, że obie te metody dają bardzo zbliżone wyniki.

Z powyższej obserwacji wynikają dwie kwestie, istotne dla dynamiki tunelowania fermionów. Po pierwsze, tunelowanie par dla układów fermionowych nie będzie się w ogóle pojawiało dla oddziaływań przyciągających o zbyt małej sile. Po drugie, badanie układów fermionowych pod kątem tunelowania par będzie wymagało znacznie większego przyciągania niż w przypadku bozonowym. O ile dla dwóch bozonów mogliśmy obserwować praktycznie całą różnorodność procesów tunelowania bez rozważania oddziaływań poniżej  $g \approx -2$ , o tyle dla fermionów z oddziaływaniami o zasięgu  $w = 0.5$  obserwacja tunelowania par będzie wymagała przejścia do dość silnych oddziaływań  $g \lesssim -9$ . Co istotne, w granicy oddziaływań kontaktowych ( $w \rightarrow 0$ ) graniczna wartość przyciągania  $g_{\text{pair}}$  dąży do  $-\infty$  i tym samym dominacja tunelowania par nie jest w ogóle możliwa. Wiąże się to wprost z faktem, że oddziaływania kontaktowe między identycznymi fermionami znikają i nie mają żadnego wpływu na ich fizykę.



**Rysunek 36:** (a) Energia stanu podstawowego dwóch fermionów w pułapce harmoniczej (linie ciągłe) jako funkcja siły oddziaływań  $g$  przy stałym zasięgu oddziaływań  $w$ , porównana z energią stanu podstawowego dla dwóch bozonów z takimi samymi oddziaływaniami (linie kreskowane). Pokazano także energię fermionów w granicznym przypadku  $w \rightarrow 0$ . (b) Energia stanu podstawowego dwóch fermionów jako funkcja zasięgu oddziaływań  $w$  przy stałej sile oddziaływań  $g$ . Widzimy, że energia układu fermionów jest mniej czuła na oddziaływania ze względu na znikanie funkcji falowej w  $r = 0$ . Dla  $w$  wzrastających powyżej zera energia staje się bardziej czuła na zmiany w  $g$ , ale dla bardzo dużych  $w$  na powrót zaczyna zbliżać się do energii układu nieoddziałującego. Energię podano w jednostkach  $\hbar\Omega$ , zasięg  $w$  w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ .

## 4.2 Stan początkowy układu

Porównajmy teraz stan początkowy dwóch fermionów ze stanem początkowym dwóch bozonów. Stan początkowy definiujemy w podobny sposób jak poprzednio, tj. jako stan podstawowy  $N$  fermionów oddziałujących potencjałem  $U(r)$ , umieszczonych w studni oscylatora harmonicznego. W tym przypadku wartość otrzymanych numerycznie energii również jest bliska odpowiednim wynikom analitycznym z pracy [114].

Na rys. 36a przedstawiono energię stanu podstawowego  $E_2(g, w)$  dla dwóch fermionów w zależności od parametru  $g$  (linie ciągłe), w porównaniu z energią analogicznego układu dwóch bozonów (linie przerywane). Można zauważyć, że energia dwóch fermionów, w porównaniu z układem bozonowym, jest mniej czuła na zmiany  $g$  (nachylenie krzywej  $E_2(g, w)$  jest mniejsze). Wynika to z faktu, że funkcja falowa dwóch identycznych fermionów znika dla  $x_1 = x_2$ , przez co oddziaływania międzycząstkowe o niewielkim zasięgu są słabo odczuwalne.

W granicy  $w \rightarrow 0$  potencjał  $U(r)$  jest niemal równoważny potencjałowi  $g\delta(r)$ , przez co oddziaływania między identycznymi fermionami zanikają całkowicie i energia zbiega do stałej wartości (dla dwóch fermionów energia ta wynosi  $E_2 = 1/2 + 3/2 = 2$ , tj. suma energii dwóch pierwszych stanów własnych oscylatora harmonicznego). W miarę

zwiększania  $w$  powyżej zera, oddziaływania stają się bardziej odczuwalne (co widać po wzrastającym nachyleniu  $E_2$  w pobliżu punktu  $g = 0$ ). Zauważmy, że jest to zachowanie wprost przeciwne w stosunku do układu dwóch bozonów, w którym wzrost  $w$  powoduje, że energia  $E_2$  w pobliżu punktu  $g = 0$  staje się mniej czuła na oddziaływania. Jednak należy zwrócić uwagę, że w granicy  $w \rightarrow \infty$  oddziaływania nie są już odczuwalne przez układ dwóch fermionów, z tego samego powodu, co dla bozonów. Dlatego dla bardzo dużych  $w$  trend ten ulegnie odwróceniu i dalszy wzrost  $w$  powoduje, że energia zbliża się do wartości nieoddziałującej. Widać to wyraźnie na rys. 36b, gdzie ukazano, jak zmienia się energia układu  $E_2(g, w)$  w miarę regulacji  $w$ , przy zachowaniu stałej wartości  $g$ . W stosunku do bozonów istotną różnicą jest fakt, że tym razem  $E_2$  dąży do tej samej stałej wartości zarówno w granicy  $w \rightarrow \infty$  (z tego samego powodu, co dla bozonów), jak i w granicy  $w \rightarrow 0$  (z powodu znikania funkcji falowej dla  $x_1 = x_2$ ). Tak więc zależność  $E_2$  od zasięgu  $w$  jest wyraźnie niemonotoniczna zarówno dla oddziaływań przyciągających, jak i odpychających. Jednak takie duże wartości  $w$  wychodzą poza zakres tej rozprawy.

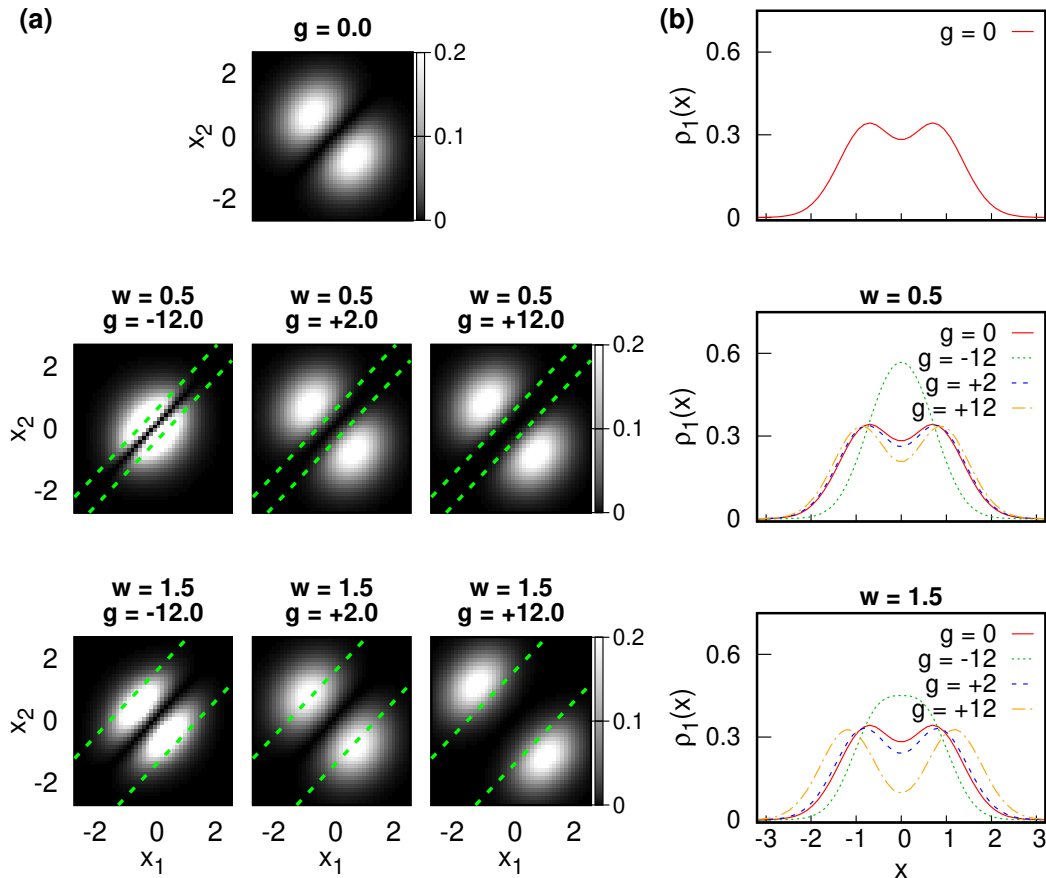
Podobnie, jak w przypadku bozonów, dla bardzo dużych  $g$  energia cząstek uciekających ze studni może przekroczyć wysokość bariery  $\lambda = 2.5$ . Dlatego przy analizie dynamiki układu fermionowego ograniczymy się do oddziaływań  $g \lesssim +6.0$ , dla których energia jest wystarczająco niska.

Przyjrzyjmy się teraz rozkładowi gęstości fermionów w stanie podstawowym. Na rys. 37 ukazano dwu- i jednociąłowy profil gęstości dla stanu początkowego dwóch fermionów, dla różnych wartości siły oddziaływań  $g$  oraz zasięgu oddziaływań  $w$ . Zielonymi liniami zaznaczono obszar dwuciąłowej przestrzeni konfiguracyjnej, dla którego  $|x_1 - x_2| \leq w$ . Antysymetria fermionowej funkcji falowej gwarantuje, że  $\rho_2(x_1, x_2) = \rho_2(x_2, x_1)$ . Można porównać tę ilustrację z analogiczną ilustracją dla bozonów (rys. 29 na str. 43).

Dla  $g = 0.0$  (górny rząd) stan początkowy jest antysymetryczną kombinacją dwóch najniższych stanów oscylatora harmonicznego i w związku z tym  $\rho_2(x_1, x_2) \sim (x_1 - x_2)^2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$ . Profil dwuciąłowy  $\rho_2$  ma w tym przypadku zupełnie inną postać niż dla stanu podstawowego bozonów. Występują w nim wyraźne antykorelacje między położeniami cząstek (znalezienie fermionów z tej samej strony studni jest mniej prawdopodobne niż po przeciwnych stronach). Inną postać w stosunku do bozonów ma też profil jednociąłowy  $\rho_1$ , który tym razem ma dwa maksima, położone po obu stronach studni.

Spójrzmy teraz na przypadek oddziaływań o względnie małym zasięgu  $w = 0.5$  (środkowy rząd). Dla oddziaływań przyciągających ( $g = -12$ ) fermiony zbliżają się do siebie, a gęstość dwuciąłowa skupia się bliżej diagonalu  $x_1 = x_2$ . Profil gęstości jednociąłowej  $\rho_1$  staje się węższy, a co więcej, dla tak dużych przyciągań oba maksima zbliżają się do centrum studni i łączą się w jedno maksimum. Inaczej jest dla oddziaływań odpychających ( $g = +2, g = +12$ ). Ponieważ gęstość stanu nieoddziałującego już jest praktycznie zerowa w obszarze  $|x_1 - x_2| \leq w$ , oddziaływania odpychające praktycznie nie mają wpływu na stan początkowy i zarówno rozkład  $\rho_2$ , jak i rozkład  $\rho_1$  pozostają prawie niezmiennione.

Przejdźmy teraz do oddziaływań o większym zasięgu  $w = 1.5$  (dolny rząd). Dla oddziaływań przyciągających ( $g = -12$ ) zachowanie układu jest podobne, jak w przypadku  $w = 0.5$ . Tym razem jednak efekt dla tej samej wartości  $g$  jest słabszy – gęstość nie jest równie silnie skupiona blisko diagonalu  $x_1 = x_2$ , a maksimum profilu  $\rho_1$  nie jest równie wysokie. W przypadku oddziaływań odpychających ( $g = +2, g = +12$ ) zasięg  $w$  jest wystarczająco duży, by oddziaływania miały odczuwalny wpływ na profil funkcji falowej. Dla wystarczająco dużej wartości  $g$  następuje całkowite opróżnienie obszaru  $|x_1 - x_2| < w$ , tak, że dwa maksima w rozkładzie  $\rho_2$  oraz  $\rho_1$  zostają rozepchnięte na



**Rysunek 37:** (a) Rozkład gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2)$  oraz (b) rozkład gęstości jednociiałowej  $\rho_1(x)$  stanu podstawowego układu  $N = 2$  fermionów dla różnych wartości siły oddziaływań  $g$  oraz zasięgu oddziaływań,  $w$ . Górny rząd – układ nieoddziałujący ( $g = 0$ ); środkowy i dolny rząd – układ oddziałujący potencjałem  $U(r)$  z zasięgiem  $w = 0.5$  lub  $w = 1.5$ . Zielone linie kreskowane na wykresach  $\rho_2(x_1, x_2)$  wyznaczają granice obszaru  $|x_1 - x_2| \leq w$ . Położenie i zasięg  $w$  podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ .

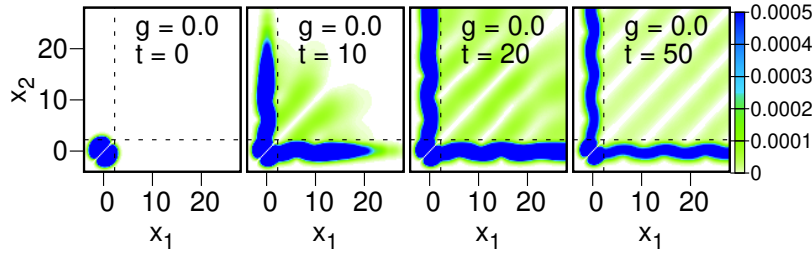
boki, a znalezienie fermionu w centrum studni staje się znacznie mniej prawdopodobne. Warto w tym miejscu wspomnieć, że w granicy zupełnej separacji między cząstkami wiele fizycznych właściwości układu nie zależy od statystyki układu, zatem różnica między fermionami i bozonami zanika [114]. Można się o tym przekonać, porównując profil gęstości stanu podstawowego fermionów dla  $w = 1.5, g = +12$  oraz analogiczny profil dla stanu bozonów z tymi samymi parametrami oddziaływań (patrz rys. 29 na str. 43). Profile te są bardzo podobne do siebie.

## 4.3 Dynamika po otwarciu studni

### 4.3.1 Ewolucja gęstości prawdopodobieństwa

Przejdźmy teraz do analizy dynamicznych właściwości układu. Podobnie, jak wcześniej, zaczynamy od zbadania ewolucji gęstości dwuciałowej  $\rho_2(x_1, x_2; t)$  po otwarciu studni w chwili  $t = 0$ . Na rys. 38 ukazano postać profilu gęstości  $\rho_2$  w różnych chwilach  $t$ , dla układu dwóch nieoddziałujących fermionów (można porównać z analogicznym





**Rysunek 38:** Ewolucja w czasie rozkładu gęstości  $\rho_2(x_1, x_2, t)$  dla układu dwóch nieoddziałujących fermionów. Linie kreskowane oznaczają granicę studni  $x_w = \sqrt{5}$  i dzielą przestrzeń konfiguracyjną na trzy różne obszary  $P_i$ . Odległości podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ .

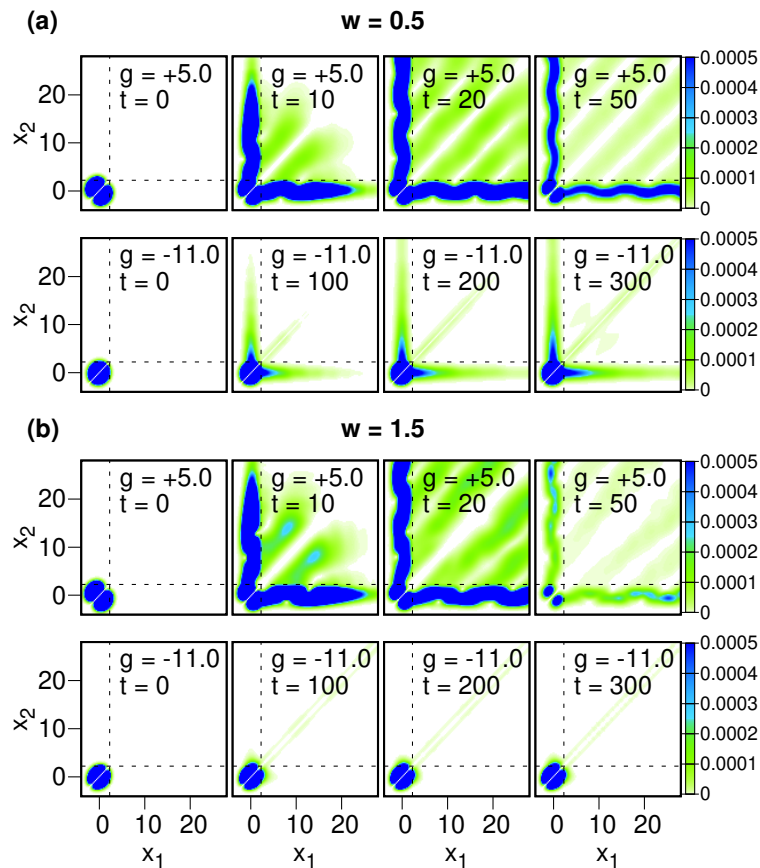
rysunkiem dla nieoddziałujących bozonów – pierwszy rząd na rys. 7 ze str. 15).

Ze względu na inną statystykę cząstek, dynamika dla dwóch fermionów już dla układu nieoddziałującego różni się znacznie od dynamiki bozonów. W tym przypadku dwuciałowa funkcja falowa nie jest już iloczynem dwóch identycznych jednociiałowych funkcji falowych, lecz jest antysymetryczną kombinacją dwóch ortogonalnych jednociiałowych funkcji falowych. Gęstość na diagonalu  $x_1 = x_2$  pozostaje zerowa niezależnie od  $t$ , a jednoczesne tunelowanie dwóch fermionów jest stłumione. W układzie obecne są zatem niezerowe korelacje międzycząstkowe, choć są to korelacje trywialne, wynikające jedynie ze statystyki cząstek. Jedynym mechanizmem tunelowania jest w tym przypadku tunelowanie sekwencyjne: gęstość przepływa z obszaru  $P_2$  do  $P_1$ , a stąd do  $P_0$ .

Po krótkim czasie od rozpoczęcia ewolucji układu w obszarze  $P_0$  widoczne są serie równoległych prążków o zerowej gęstości, równoległych do diagonalu  $x_1 = x_2$ . Ich obecność można w prosty sposób wyjaśnić jako wynik interferencji między funkcjami falowymi dwóch niemal swobodnych cząstek o różnych pędach. W tym przybliżeniu gęstość dwuciałowa w obszarze  $P_0$  przybiera postać  $\rho_2(x_1, x_2) \approx |e^{ik_1x_1}e^{ik_2x_2} - e^{ik_2x_1}e^{ik_1x_2}|^2 = 2[1 - \cos[(k_2 - k_1)(x_1 - x_2)]]$ . Ponieważ każdy z dwóch fermionów ma początkowo określoną wartość energii ( $E = 1/2$  i  $E = 3/2$ ), odpowiadające im pędy  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = \sqrt{3}$  są łatwe do obliczenia. Podstawiając wartości  $k_1, k_2$  do powyższego wzoru, otrzymamy  $\rho_2$  o postaci serii prążków interferencyjnych w odstępach zbliżonych do tych przedstawionych na ilustracji.

Obecność tych linii można też zinterpretować w sposób bardziej fenomenologiczny. Jako pierwszy studnię może opuścić fermion w stanie podstawowym lub w stanie wzbudzone (tunelują one całkowicie niezależnie od siebie). Możemy zatem w przybliżeniu założyć, że pozostały w studni fermion jest w superpozycji stanów podstawowego i wzbudzonego. Fermion w takiej superpozycji będzie regularnie oscylował wewnątrz studni (z okresem równym  $2\pi$  jednostek czasowych). Oscylacja ta jest w istocie widoczna jako falisty kształt gęstości w obszarze  $P_1$ . Tunelowanie tego fermionu staje się bardziej prawdopodobne, gdy dociera on do bariery po prawej stronie studni. Zatem przepływ gęstości  $\rho_2$  z obszaru  $P_1$  do  $P_0$  zachodzi w regularnych odstępach czasowych, co prowadzi do powstania regularnej serii linii w obszarze  $P_0$ .

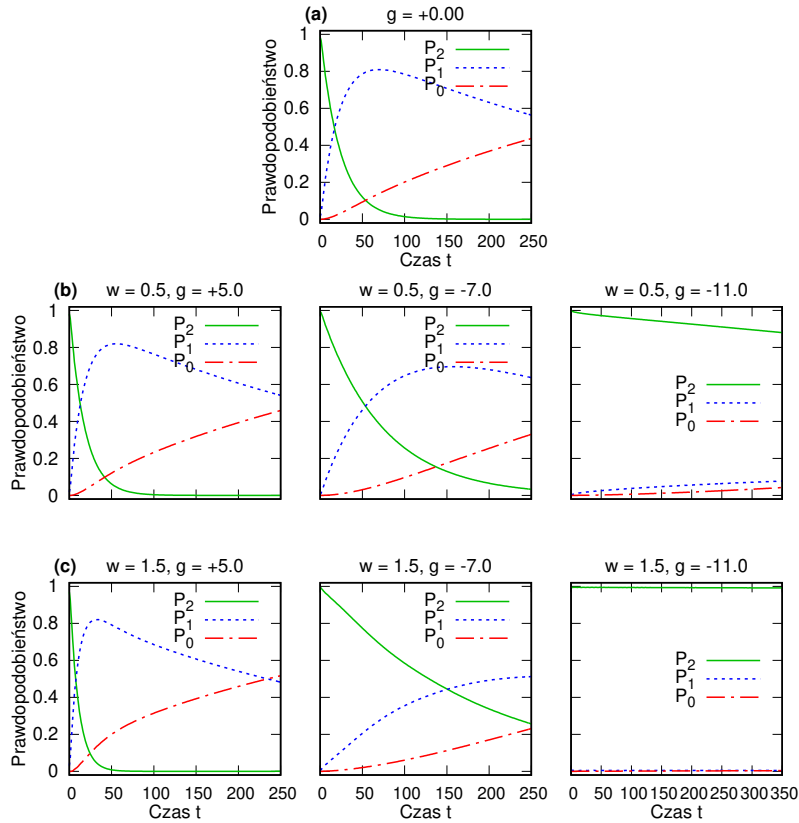
Przyjrzyjmy się teraz dynamice  $\rho_2$  dla niezerowych oddziaływań między fermionami. Ewolucję  $\rho_2$  dla różnych wartości parametrów  $g$  i  $w$  ukazano na rys. 39. W przypadku oddziaływań odpychających ( $g = +5$ ) ich wpływ na dynamikę zależy silnie od zasięgu  $w$ . Dla względnie małego zasięgu  $w = 0.5$  (pierwszy rząd), jak już zauważyliśmy przy omawianiu stanu początkowego, dodatkowe odpychania praktycznie nie mają wpływu



**Rysunek 39:** Ewolucja w czasie rozkładu gęstości  $\rho_2(x_1, x_2, t)$  dla układu dwóch fermionów o różnych wartościach siły oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$  ((a)  $w = 0.5$ , (b)  $w = 1.5$ ). Linie kreskowane oznaczają granicę studni  $x_w = \sqrt{5}$  i dzielą przestrzeń konfiguracyjną na trzy różne obszary  $P_i$ . Odległości i zasięg oddziaływań podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , siłę oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , czas w jednostkach  $1/\Omega$ .

na zachowanie układu. Tak więc dynamika  $\rho_2$  pozostaje praktycznie taka sama, jak dla układu nieoddziałującego. Inaczej jest dla większego zasięgu  $w = 1.5$  (trzeci rząd). Tutaj oddziaływania mają na tyle daleki zasięg, że są odczuwalne mimo znikania gęstości na diagonalu  $x_1 = x_2$  i w widoczny sposób wpływają na dynamikę układu. Powodują między innymi zmianę kształtu minimów interferencyjnych w obszarze  $P_0$ . Oczywiście, niezależnie od  $w$ , tunelowanie zachodzi tylko sekwencyjnie, gdyż łączenie się fermionów w pary dla oddziaływań odpychających w ogóle nie jest możliwe.

Spójrzmy teraz na przypadek silnych oddziaływań przyciągających ( $g = -11$ ). Dla tej siły oddziaływań możliwe jest tworzenie związanych par fermionowych i stan początkowy może rozpaść się przez tunelowanie par. Dla  $g = -11, w = 0.5$  (drugi rząd) nadal występuje widoczny wkład tunelowania sekwencyjnego, o czym świadczy przepływ gęstości z obszaru  $P_2$  do  $P_1$ . Zauważyć można też jednak tunelowanie par, jako obszar o zwiększonej gęstości otaczający diagonalę  $x_1 = x_2$ . Dla przypadku  $g = -11, w = 1.5$  (czwarty rząd) tunelowanie sekwencyjne zanika i fermiony są emitowane tylko jako pary. Widzimy zatem, że dla fermionów istnieje reżim zdominowany przez tunelowanie par, podobnie, jak dla bozonów. Zauważmy, że wpływ regulacji  $w$  na dynamikę jest tu



**Rysunek 40:** Ewolucja w czasie prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n(t)$  znalezienia dokładnie  $n$  cząstek w studni, dla układu dwóch fermionów o różnej sile oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ : (a) brak oddziaływań, (b)  $w = 0.5$ , (c)  $w = 1.5$ . Można porównać ten rysunek z analogicznymi wynikami dla bozonów (rys. 31 na str. 46). Czas podano w jednostkach  $1/\Omega$ , siłę oddziaływań  $g$  w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega}/m$ .

odwrotny niż dla bozonów: zwiększenie  $w$  powoduje, że tunelowanie sekwencyjne jest tłumione w większym stopniu. Można wytłumaczyć ten efekt przez odwołanie do całkowitej energii układu (patrz rys. 36 na str. 52). Dla  $g = -11$ , zwiększenie zasięgu oddziaływań z  $w = 0.5$  do  $w = 1.5$  powoduje spadek energii układu i tym samym silniejsze tłumienie tunelowania jednociąłowego.

Spójrzmy teraz na ewolucję poszczególnych prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n$ . Na rys. 40 ukazujemy ewolucję prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0$  dla układu dwóch fermionów, dla różnych wartości siły oddziaływań  $g$  oraz zasięgu oddziaływań  $w$ . Porównując je z analogicznymi wynikami dla bozonów (rys. 31 ze str. 46) stwierdzamy, że ewolucja  $\mathcal{P}_n$  przebiega bardzo podobnie do przypadku bozonowego. Tak, jak poprzednio, w granicy silnych przyciągań układ przechodzi do reżimu, w którym  $\mathcal{P}_1(t)$  pozostaje cały czas bliskie zera.

Wpływ wartości zasięgu oddziaływań  $w$  na dynamikę  $\mathcal{P}_n(t)$  jest w tym przypadku odwrotny niż dla bozonów. Dla oddziaływań odpychających wzrost  $w$  powoduje wyraźne przyspieszenie spadku prawdopodobieństwa  $\mathcal{P}_2(t)$ . Z kolei dla oddziaływań przyciągających zwiększenie  $w$  powoduje, że spadek  $\mathcal{P}_2(t)$  jest wolniejszy, a maksimum  $\mathcal{P}_1(t)$  przybiera mniejszą wartość. Świadczy to o tym, że tunelowanie sekwencyjne jest bardziej tłumione w miarę wzrostu  $w$ . Efekty te stanowią odzwierciedlenie faktu, że wraz ze wzrostem  $w$  układ dwóch identycznych fermionów staje się bardziej czuły na oddziaływania, co

przekłada się odpowiednio na dynamikę  $\mathcal{P}_n(t)$ .

Powyższe wyniki potwierdzają, że mimo różnic w kwantowej statystyce, jakiej podlegają cząstki, układ dwóch fermionów wykazuje przejście między dwoma reżimami tunelowania w sposób analogiczny jak układ bozonowy. Warto ponadto zauważyć, że w tym przypadku wszelkie jakościowe różnice między dynamiką bozonów a fermionów są praktycznie niewidoczne na poziomie wycalkowanych prawdopodobieństw  $\mathcal{P}_n$  (oczywiście za wyjątkiem różnic w krytycznych wartościach oddziaływania  $g$ , w których zmienia się mechanizm tunelowania).

### 4.3.2 Stała rozpadu i udział tunelowania par

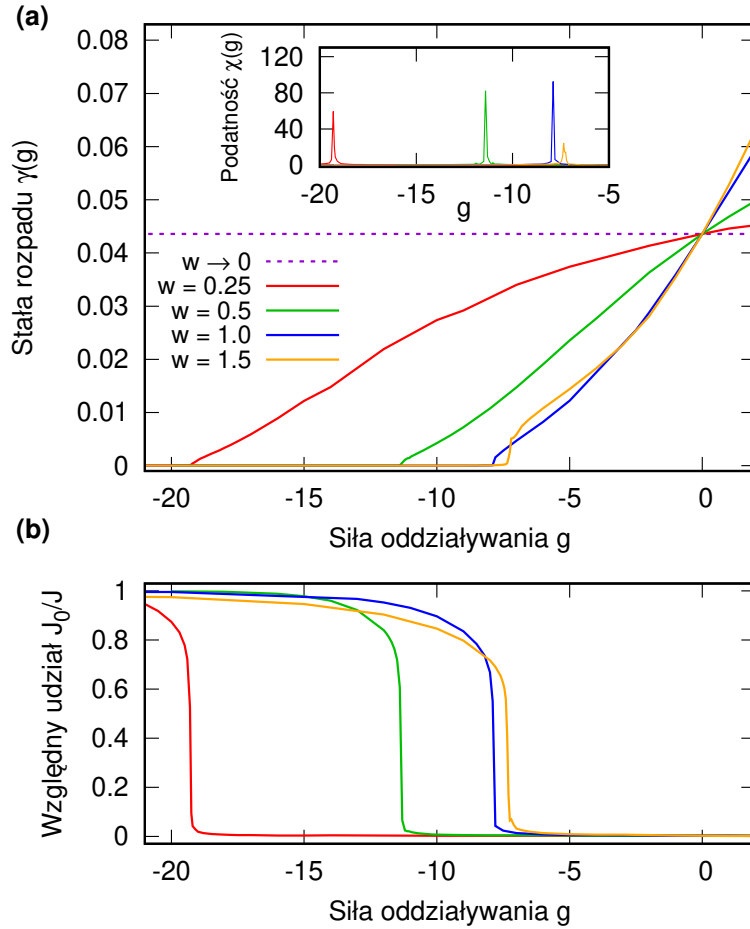
Przyjrzymy się teraz dokładniej przejściu między różnymi procesami tunelowania, analizując zachowanie stałej rozpadu  $\gamma$  oraz wycalkowanych prądów prawdopodobieństwa  $J(t)$ ,  $J_1(t)$  i  $J_0(t)$ . Tak, jak w przypadku bozonowym, rozpad stanu początkowego układu fermionowego przebiega w sposób wykładniczy z dobrze określoną stałą rozpadu  $\gamma$ , którą można znaleźć przez dopasowanie funkcji wykładniczej do  $\mathcal{P}_2(t)$ . Podobnie, wartości  $J_1/J$ ,  $J_0/J$  pozostają stałe w czasie podczas praktycznie całej ewolucji.

Na rys. 41a przedstawiono wartość stałej rozpadu  $\gamma(g)$  oraz jej podatności  $\chi(g)$  dla układu dwóch fermionów w funkcji  $g$ , dla różnych wartości zasięgu oddziaływań  $w$ . Poniżej (rys. 41b) przedstawiono wartość względnego udziału tunelowania par  $J_0/J$  w funkcji  $g$ . Można porównać te wyniki z analogicznymi wynikami dla bozonów (rys. 32 na str. 47).

Pierwszą rzucającą się w oczy różnicą w stosunku do bozonów jest fakt, że tym razem w miarę wzrostu  $w$  wartość  $\gamma$  staje się coraz bardziej czuła na zmiany  $g$  (nachylenie wykresu rośnie), co stanowi przeciwieństwo przypadku bozonowego. Skutkuje to tym, że dla oddziaływań odpychających stała rozpadu zwiększa się wraz z  $w$ , a dla oddziaływań przyciągających spada w miarę wzrostu  $w$ . Jest to zależność analogiczna do tej, którą zaobserwowaliśmy dla całkowitej energii  $E_2(g)$  układu (patrz rys. 36 na str. 52). W granicy  $w \rightarrow 0$  oddziaływanie  $U(r)$  znika dla identycznych fermionów, więc w tej granicy  $\gamma(g)$  przybiera wartość niezależną od  $g$  (zaznaczoną na rysunku linią przerywaną).

W tym miejscu trzeba jednak zaznaczyć, że ten trend jest zachowany tylko dla względnie małych zasięgów oddziaływań, rzędu jednej jednostki długości ( $w \lesssim 1.0$ ). Można bowiem przewidywać, że w granicy  $w \rightarrow \infty$  stała rozpadu  $\gamma$  zmierza do stałej wartości tak samo, jak dla  $w \rightarrow 0$ , z tych samych powodów, co dla bozonów. Tak więc dla bardzo dużego zasięgu  $w$  przewidzieć można, że trend wzrastającej czułości  $\gamma$  na zmiany  $g$  ulegnie odwróceniu. Na przykład widać, że dla dużego zasięgu  $w = 1.5$  nachylenie krzywej  $\gamma(g)$  już nie rośnie, ale jest niemal identyczne co dla  $w = 1.0$ .

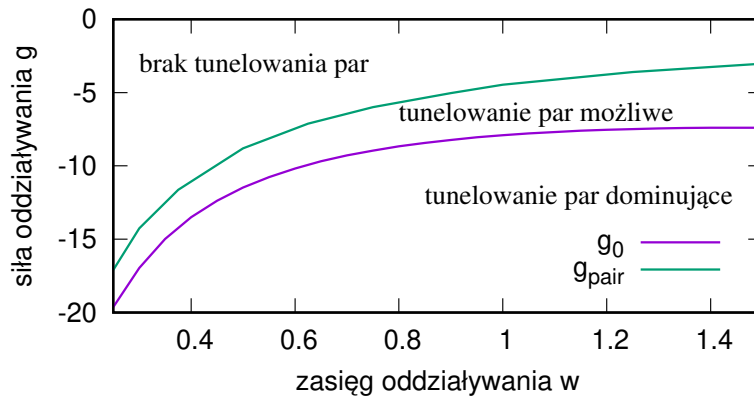
Widzimy, że zależność stałej rozpadu  $\gamma(g)$  od  $g$  ma podobną właściwość, jak dla bozonów – istnieje krytyczna siła oddziaływań  $g_0$  (jest to wielkość zależna od  $w$ ), w której występuje nagła zmiana w przebiegu  $\gamma(g)$  i pojawia się ostry pik w  $\chi(g)$ . W tej samej wartości  $g_0$  występuje także przejście układu między reżimami zdominowanymi przez tunelowanie sekwencyjne i tunelowanie par. Podobnie, jak dla bozonów, wartość  $g_0$  można bezpośrednio powiązać z energią układu jako wartość  $g$ , poniżej której  $E_2(g) < E_1$ . Wartość  $g_0$  przesuwa się w stronę silniejszych oddziaływań przyciągających wraz ze spadkiem  $w$  i w granicy  $w \rightarrow 0$  wartość ta dąży do minus nieskończoności. Przy tej okazji widać wyraźnie, że dla fermionów analiza tunelowania par wymaga sił oddziaływań o znacznie większej skali niż w przypadku bozonów. Dla zobrazowania tego faktu można rozważyć, że, o ile dla układu bozonowego zmiana  $w$  od wartości  $w = 0.25$  do  $w = 1.5$  powoduje względnie niewielkie przesunięcie wartości  $g_0$ , o tyle dla układu fermionowego



**Rysunek 41:** (a) Stała rozpadu  $\gamma(g)$  dla  $\mathcal{P}_2(t)$  jako funkcja siły oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ , dla układu dwóch fermionów. Wstawka: Podatność  $\chi(g) = \gamma^{-1}(\partial\gamma/\partial g)$ . (b) Stosunek  $J_0/J$ , wyrażający względny udział tunelowania par w ogólnej dynamice tunelowania układu dwóch fermionów, w zależności od siły oddziaływań  $g$  i zasięgu oddziaływań  $w$ . Siła oddziaływań wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3\Omega/m}$ , zasięg oddziaływań w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ , stała rozpadu w jednostkach  $\Omega$ , podatność w jednostkach  $\sqrt{m/\hbar^3\Omega}$ .

analogiczne przesunięcie  $g_0$  jest o rząd wielkości większe.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób dotychczasowe obserwacje z tego rozdziału wskazują drogę do kontrolowania właściwości układu na drodze regulacji  $w$ . Podobnie jak w przypadku bozonowym, przez zmianę wartości  $w$  można wpływać na energię początkową układu i tym samym pośrednio manipulować wartością  $g_0$ . Ponadto, jak zauważyliśmy w podrozdziale o widmie hamiltonianu fermionowego (podrozdział 4.1), tworzenie związanych par staje się możliwe tylko poniżej pewnej wartości  $g = g_{\text{pair}}$ , która też jest zależna od zasięgu oddziaływań  $w$ . Na rys. 42 ukazujemy wartości  $g_{\text{pair}}$  i  $g_0$  w zależności od  $w$ . Jak widać, poprzez zmianę  $w$  można je regulować w dość szerokim zakresie (choć nie niezależnie od siebie). Otwiera to nowe możliwości doświadczalnej regulacji właściwości układu. Co więcej, jak zauważyliśmy w podrozdziale 2.6 (str. 23), zmiana kształtu potencjału poza studnią także wpływa na krytyczną wartość  $g_0$ , co potencjalnie otwiera drogę do niezależnej manipulacji wartościami  $g_0$  i  $g_{\text{pair}}$ . Warto z drugiej strony zauważyć, że doświadczalne ustalenie krytycznej wartości  $g_0$  bądź  $g_{\text{pair}}$  (na



**Rysunek 42:** Wartość dwóch granicznych sił oddziaływań  $g$  w funkcji zasięgu oddziaływań  $w$ :  $g_{\text{pair}}$ , poniżej którego w widmie hamiltonianu wielociałowego pojawiają się stany związane dla dwóch fermionów, oraz  $g_0$ , poniżej którego następuje przejście do reżimu dominacji tunelowania par (zdefiniowana jako  $E_2(g_0) = 0.5$ ). Widoczne są trzy odróżnialne obszary, opisane tekstowo. Siła oddziaływań  $g$  wyrażona jest w jednostkach  $\sqrt{\hbar^3 \Omega / m}$ , zasięg oddziaływań  $w$  w jednostkach  $\sqrt{\hbar / m \Omega}$ .

drodze analizy dynamiki układu) może pozwolić na wyznaczenie efektywnego zasięgu oddziaływań  $w$ .

Podsumujmy wyniki tego rozdziału. Ustaliliśmy, że właściwości układu dwóch fermionów pod pewnymi względami są znacznie inne niż w przypadku bozonów. Pierwszą różnicą jest zauważalnie odmienna postać dwuciałowych korelacji gęstości  $\rho_2$ . Druga różnica dotyczy zachowania energii układu i stałej rozpadu przy regulacji zasięgu oddziaływania  $w$  (dla niewielkich wartości  $w$ ). W przypadku bozonów, jak pamiętamy, wzrost zasięgu  $w$  powoduje osłabienie wpływu oddziaływań, tak, że energia i stała rozpadu dążą do wartości układu nieoddziałującego. Inaczej jest w przypadku fermionów: ponieważ w granicy  $w \rightarrow 0$  oddziaływanie między fermionami znika, wzrost  $w$  powoduje nasilenie wpływu oddziaływań. Trzecią różnicę stanowi fakt, że dla fermionów zaobserwowanie tunelowania par wymaga znacznie silniejszego oddziaływania przyciągającego. Jednak, pomimo tych wszystkich różnic, dynamikę dla układu fermionów można – tak samo jak dla bozonów – opisać w kategoriach nagłego przejścia między różnymi mechanizmami tunelowania, które można wykryć np. poprzez analizę stałej rozpadu  $\gamma(g)$ .

## Rozdział 5

# Wnioski i zakończenie

W rozprawie przedyskutowałem dynamikę jednowymiarowego układu kilku identycznych cząstek tunelujących z przeciekającej studni potencjału do otwartej przestrzeni. Moim celem było systematyczne zbadanie, jak dokładnie będzie wyglądało tunelowanie w zależności od parametrów oddziaływania międzycząstkowego – czy cząstki będą opuszczały studnię jedna za drugą, czy też po kilka jednocześnie. W tym celu przeprowadziłem bezpośrednio, ściśle symulacje numeryczne dynamiki modelowego układu dla różnych wartości parametrów oddziaływania. Dynamikę zbadałem z kilku różnych punktów widzenia, takich jak stała rozpadu układu, dominacja różnych mechanizmów tunelowania lub rozkłady pędów uciekających cząstek.

W wyniku przeprowadzonej analizy stało się jasne, że tunelowanie układu kilkucząstkowego można opisać w ramach kilku konkurujących ze sobą procesów, odpowiadających dominacji różnych kanałów tunelowania. Układ przechodzi między nimi w nagły sposób, kiedy siła oddziaływań  $g$  przechodzi przez określone krytyczne wartości. Dla układów dwucząstkowych istnieją dwa takie reżimy, zdominowane przez tunelowanie pojedynczych cząstek oraz tunelowanie związanych par. Dla układu trzech bozonów oddziałujących kontaktowo istnieją natomiast trzy takie reżimy, różniące się tym, który z poszczególnych mechanizmów rozpadu stanu początkowego jest dominujący (emisja pojedynczej cząstki, pary lub trimeru).

Zmiany w dominującym procesie tunelowania występują, gdy całkowita energia układu spada poniżej określonych wartości. Korzystając z tego faktu, można za pomocą uproszczonego opisu teoretycznego wyznaczyć krytyczne wartości siły oddziaływań, w których nastąpi zmiana natury tunelowania. Ten uproszczony opis opiera się na założeniu, że energia cząstek po ucieczce ze studni ma określoną minimalną wartość. Dla potencjałów, które nie są ograniczone od dołu, przejścia między różnymi procesami tunelowania są mniej ostre, a krytyczne wartości siły oddziaływań ulegają zmianie.

Choć w pracy skoncentrowałem się głównie na przypadku kilku bozonów oddziałujących potencjałem kontaktowym, to zbadałem również dynamikę układów dwóch identycznych cząstek (bozonów lub fermionów) oddziałujących siłami o skończonym zasięgu. Pomimo pewnych różnic, ogólny obraz przejść między poszczególnymi reżimami pozostaje zachowany, niezależnie od natury oddziaływania, a także statystyki cząstek. Jednak oddziaływania o niezerowym zasięgu dodają nowy parametr kontroli nad układem, umożliwiając zmianę krytycznych wartości  $g$ , dla których następują zmiany dominujących procesów tunelowania.

Ponieważ układy kwantowe przedstawione w tej pracy są możliwe do realizacji doświadczalnej, wyniki mogą mieć znaczenie dla przyszłych eksperymentów wykorzystujących ultrazimne atomy. Dlatego właśnie duży nacisk starałem się położyć na charak-

teryzowanie dynamiki za pomocą wielkości fizycznych, które są wprost doświadczalnie mierzalne, takie jak stała rozpadu lub rozkład pędów uciekających cząstek. Otwiera to drogę do eksperymentalnego potwierdzenia tezy mojej rozprawy i tym samym może być użytecznym narzędziem do zrozumienia dynamiki układu.

W tym miejscu należy podkreślić, że uzyskane wyniki wciąż nie odpowiadają na wszystkie nurtujące pytania. Przykładowo, w tej pracy ograniczyłem się do oddziaływań o względnie niewielkim zasięgu. Powstaje pytanie, jak zachowywałby się układ dla oddziaływań o bardzo dużym zasięgu, rzędu co najmniej kilku naturalnych jednostek długości. Przeprowadzone przez mnie wstępne obliczenia sugerują, że w tej sytuacji układ może mieć zauważalnie inne właściwości dynamiczne, m.in. dla pewnych sił oddziaływań rozpad stanu początkowego może mieć niewykładniczą postać.

Interesujące możliwości stwarza też wybór innego stanu początkowego. W pracy zawsze zakładałem, że w chwili początkowej układ jest w wielociałowym stanie podstawowym studni tuż przez jej otwarcie. Jednak wykorzystanie zamiast tego jakiegoś stanu wzbudzonego (doświadczalnie możliwego do wytworzenia) mogłoby zaowocować całkiem innymi właściwościami dynamicznymi układu. Istniejące badania nad tunelowaniem ze wzbudzonego stanu początkowego sugerują bowiem, że dynamika może w tym wypadku zdradzać ciekawe właściwości, takie jak wyraźnie niemonotoniczna zależność stałej rozpadu  $\gamma(g)$  od  $g$  [46, 48].

Moja praca koncentruje się na układach  $N = 2$  i  $N = 3$  cząstek. Jednak analiza przypadku większych liczb cząstek może być interesująca, ponieważ w tym wypadku istnieje jeszcze większa różnorodność możliwych procesów tunelowania. Można na przykład zadać pytanie, czy obraz  $N$  odrębnych reżimów, pokazany dla dwóch i trzech cząstek, pozostaje w mocy dla  $N \geq 4$  cząstek. Dla wystarczająco dużych liczb cząstek można by też zbadać, w jaki sposób właściwości układu przechodzą we właściwości tunelującego układu makroskopowego (np. kondensatu Bosego-Einsteina). Mogłoby to rzucić światło na znany od dawna problem, w jaki sposób można w zadowalający sposób połączyć fizykę układów kilku ciał, dobrze opisaną standardowymi metodami mechaniki kwantowej, z przypadkiem wielociałowym, który najlepiej można opisać metodami fizyki materii skondensowanej i fizyki statystycznej.



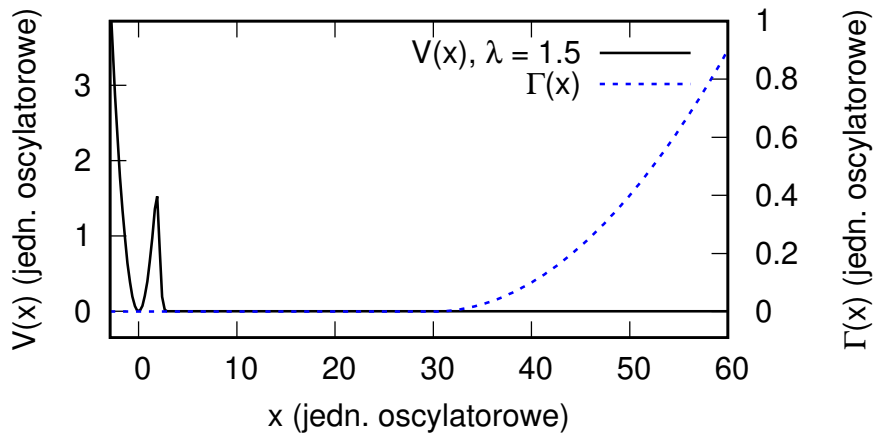
## Dodatek A

# Wykorzystanie potencjału absorbującego do symulacji nieskończonej przestrzeni

Rozważany model dotyczy tunelowania cząstek do otwartej przestrzeni o nieskończonym rozmiarze. Jednak w symulacji numerycznej musimy się ograniczyć do symulowania tylko ograniczonego wycinka przestrzeni,  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ . W symulacjach przeprowadzanych na potrzeby tej pracy granice symulowanego obszaru dobrane są zwykle następująco:  $x \in [-4, 300]$  dla przypadku  $N = 2$  cząstek oraz  $x \in [-4, 120]$  dla  $N = 3$ . Tym samym symulowany obszar poza studnią jest na tyle duży, że dynamika jest w przybliżeniu równoważna dynamice ucieczki do nieskończonej przestrzeni. Jednak uciekające cząstki docierają w końcu do krawędzi symulowanego obszaru, powodując ich niefizyczne odbicia i tym samym zaburzając wyniki symulacji. O ile możemy jeszcze dokładnie symulować dynamikę dla dość krótkich czasów  $t$  (rzędu 100 jednostek czasowych dla przyjętych wartości  $x_{\max}$ ), to poprawna symulacja dla długich czasów staje się niemożliwa. Teoretycznie można oczywiście zwiększyć wielkość symulowanego obszaru, co pozwoliłoby poprawnie symulować dynamikę dla dłuższych czasów, ale w praktyce powoduje to istotny wzrost złożoności obliczeń.

W sytuacjach, kiedy niezbędna jest symulacja zachowania układu dla długich czasów, posługujemy się metodą „zespolonego potencjału absorbującego” (*complex absorbing potential*), często wykorzystywaną w numerycznych symulacjach układów otwartych. Polega ona na tym, że do hamiltonianu jednociąłowego dodajemy człon potencjału urojonego  $-i\Gamma(x)$ , z pewną funkcją  $\Gamma(x)$  niezerową tylko w obszarze daleko od studni [117]. Powoduje to efektywnie pochłanianie cząstek z dala od studni, tj. amplituda tych komponentów funkcji falowej, dla których jakiegokolwiek cząstki przebywają w obszarze pochłaniania, zanika w miarę ewolucji w czasie. Postać funkcji  $\Gamma(x)$  musi być odpowiednio dobrana, by minimalizować odbicia od potencjału urojonego, a zarazem zapewnić jak najsilniejszą absorpcję [118]. Na potrzeby tej pracy wybrano łagodnie wzrastającą funkcję  $\Gamma(x) = \theta(x - 30)10^{-3} \times (x - 30)^2$  (patrz rys. 43). Sprawdzono też, że wyniki końcowe nie zależą od szczegółów kształtu tej funkcji.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę, że zastosowana modyfikacja sprawia, że w tym podejściu nie da się przewidzieć wszystkich właściwości układu. W szczególności wszystkie wielkości zależne od stanu układu z dala od studni są mocno zaburzone przez ten niefizyczny mechanizm pochłaniania [119]. Jednak wielkości, które są zależne tylko od stanu cząstek w pobliżu obszaru studni, są poprawnie przewidywane. Oznacza



**Rysunek 43:** Postać zespolonego potencjału absorbującego  $\Gamma(x)$ , powodującego efektywne pochłanianie cząstek w obszarze z dala od studni. Cząstki opuszczające studnię potencjału  $V(x)$  po dotarciu do obszaru  $x > 30$  są pochłaniane, dzięki czemu odbicia od prawej krawędzi symulowanego obszaru nie zaburzają dynamiki blisko obszaru  $x = 0$ . Pozwala to znacznie zmniejszyć wielkość symulowanego obszaru, jednocześnie zachowując wierną symulację dynamiki w pobliżu  $x = 0$ . Energia i długość podane są odpowiednio w jednostkach  $\hbar\Omega$  i  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

to też, że na potrzeby badania takich wielkości możemy znacznie zmniejszyć rozmiar symulowanego obszaru bez utraty dokładności, co pozwala na o wiele efektywniejsze obliczenia numeryczne.

## Dodatek B

# Identyfikacja mechanizmów tunelowania przez analizę prądu prawdopodobieństwa

Aby zbadać rozpad stanu początkowego  $N$ -cząstkowego układu, można wykorzystać metody oparte na analizie prądu prawdopodobieństwa. Prąd ten zdefiniowany jest jako wielkość wektorowa

$$\vec{j}(x_1 \dots x_N; t) = \frac{1}{2i} [\Psi^*(x_1 \dots x_N; t) \nabla \Psi(x_1 \dots x_N; t) - \Psi(x_1 \dots x_N; t) \nabla \Psi^*(x_1 \dots x_N; t)]. \quad (\text{B.1})$$

Dla uproszczenia, w dalszych rozważaniach zakładamy  $N = 2$ . Jednak wyniki da się dość łatwo rozszerzyć na większą liczbę cząstek.

W chwili  $t = 0$  cała gęstość prawdopodobieństwa znajduje się w obszarze  $\mathbf{P}_2$ , zdefiniowanym jako  $\mathbf{P}_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq x_w \wedge x_2 \leq x_w\}$  ( $x_w$  jest granicą studni). Zatem interesuje nas całkowity prąd prawdopodobieństwa, wychodzący z obszaru  $\mathbf{P}_2$ . Oznaczamy go jako  $J(t)$  i definiujemy jako

$$J(t) = \oint_{\partial \mathbf{P}_2} d\vec{n} \cdot \vec{j}(x_1, x_2; t), \quad (\text{B.2})$$

gdzie  $d\vec{n}$  to element granicy  $\partial \mathbf{P}_2$ , otaczającej obszar  $\mathbf{P}_2$ . Na mocy równania ciągłości prąd ten jest równy pochodnej  $-\partial \mathcal{P}_2(t)/\partial t$ , gdzie  $\mathcal{P}_2(t)$  (dane równaniem (2.9) na str. 14) jest prawdopodobieństwem znalezienia obu cząstek w obszarze początkowym.

Rozpad stanu początkowego przez emisję  $n$  cząstek odpowiada przepływowi gęstości prawdopodobieństwa z obszaru  $\mathbf{P}_2$  do  $\mathbf{P}_{2-n}$ . Tak więc całkowity prąd  $J(t)$  wychodzący z  $\mathbf{P}_2$  rozłożyć można na dwie niezależne części, odpowiadające dwóm różnym procesom rozpadu:

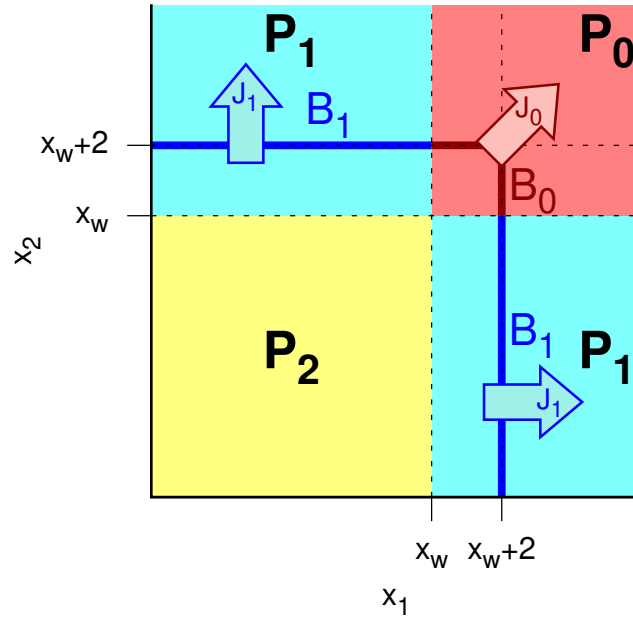
$$J(t) = J_1(t) + J_0(t), \quad (\text{B.3})$$

gdzie  $J_k(t)$  to całkowity prąd płynący z  $\mathbf{P}_2$  do  $\mathbf{P}_k$ . Tym samym  $J_1(t)$  odpowiada rozpadowi stanu początkowego przez ucieczkę pojedynczej cząstki ze studni, zaś  $J_0(t)$  odpowiada ucieczce dwóch cząstek jednocześnie.

Prądy  $J_1(t)$  i  $J_0(t)$  definiujemy jako:

$$J_k(t) = \oint_{B_k} d\vec{n} \cdot \vec{j}(x_1, x_2; t), \quad (\text{B.4})$$

gdzie  $B_k$  to odpowiedni fragment granicy  $\partial \mathbf{P}_2$ , a  $d\vec{n}$  to element  $B_k$ . Granica  $B_k$  zdefiniowana jest w taki sposób, że przepływ przez  $B_k$  odpowiada w przybliżeniu przepływowi z obszaru  $\mathbf{P}_2$  do  $\mathbf{P}_k$ .



**Rysunek 44:** Przykładowy sposób zdefiniowania prądów prawdopodobieństwa  $J_1$  i  $J_0$ , odpowiadających kolejno tunelowaniu pojedynczej cząstki lub dwóch cząstek jednocześnie ze studni, w układzie dwucząstkowym. Podział przestrzeni konfiguracyjnej na obszary  $P_n$  jest tu taki sam jak na rys. 6 ze str. 14 ( $x_w$  oznacza granicę studni). Granica  $\partial P_2$  (oznaczona grubszymi liniami), otaczająca obszar  $P_2$ , podzielona jest na segmenty  $B_1$  i  $B_0$ . Prąd  $J_1$  zdefiniowany jest jako całkowity przepływ gęstości prawdopodobieństwa przez  $B_1$ , a  $J_0$  jest zdefiniowany jako całkowity przepływ przez  $B_0$ . Taki wybór granic  $B_1$  i  $B_0$  zapewnia wyraźne rozróżnienie między prądami  $J_1(t)$  i  $J_0(t)$ , jednocześnie zapewniając, że całkowity prąd  $J_1(t) + J_0(t)$  jest w przybliżeniu równy  $-\partial P_2(t)/\partial t$ . Położenie podano w jednostkach  $\sqrt{\hbar/m\Omega}$ .

Należy zwrócić uwagę, że sposób zdefiniowania granic  $\partial P_2$  i  $B_k$  nie jest do końca jednoznaczny. W szczególności należy zastanowić się nad definicją granicy  $B_0$ . Przyglądając się podziałowi przestrzeni konfiguracyjnej (rys. 44), widzimy bowiem, że obszary  $P_2$  i  $P_0$  stykają się tylko w jednym punkcie  $x_1 = x_2 = x_w$ . Jednak w celu poprawnego obliczenia całki liniowej granica  $B_0$  powinna mieć niezerową długość. Co więcej, cząstki tworzące związaną parę mogą być w niezerowej odległości od siebie, więc całkowita gęstość pary uciekającej ze studni będzie rozłożona w pewnej odległości wokół diagonal  $x_1 = x_2$ . Dlatego, dla poprawnego wyliczenia  $J_0$ , musimy dokonać odpowiedniej redefinicji granic.

W tej pracy granicę  $\partial P_2$  i jej dwa fragmenty  $B_1, B_0$  definiujemy w sposób przedstawiony na rys. 44. Co prawda całkowita granica  $\partial P_2$  nie pokrywa się w tym przypadku idealnie z granicą obszaru  $x_1, x_2 < x_w$ , więc całkowity prąd wychodzący przez  $\partial P_2$  jest tylko w przybliżeniu równy  $-\partial P_2(t)/\partial t$ , ale za to granica  $B_0$  ma niezerową długość. Zwróćmy uwagę, że w tym podejściu występuje tendencja do lekkiego zawyżania wartości  $J_0(t)$ . Fakt ten jest jednak całkowicie fizycznym zjawiskiem, wynikającym z niemożności rozróżnienia eksperymentalnego tunelowania pary od szybko następującego po sobie tunelowania pojedynczych cząstek. Przy odpowiednim wyborze granic  $B_1$  i  $B_0$  przeprowadzone symulacje są bardzo bliskie realiom doświadczalnym.

W analogiczny sposób można postąpić dla układów o większej liczbie cząstek  $N > 2$ ,

---

gdzie przestrzeń konfiguracyjna jest wielowymiarowa. W tym wypadku wyznaczamy granice tak, by prąd prawdopodobieństwa wypływający z obszaru  $\mathbf{P}_N$  podzielony był na  $N$  różnych części  $J_k(t)$ , odpowiadających kolejno tunelowaniu 1, 2, ...,  $N$  cząstek naraz ze stanu początkowego.

Trzeba pamiętać, że taki sposób definicji  $J_k(t)$  dostarcza informacji jedynie o rozpadzie układu w stanie początkowym. Na przykład możemy ustalić, z jakim prawdopodobieństwem początkowy układ  $N = 3$  cząstek ulegnie rozpadowi przez emisję pojedynczej cząstki, ale nie będziemy już wiedzieli, czy pozostające w studni dwie cząstki będą z kolei tunelowały razem, czy osobno. Mimo to wielkość ta dostarcza bardzo użytecznej informacji o dynamice układu.



# Bibliografia

- [1] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright i D. F. Walls, “Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential”, *Phys. Rev. A* **55**, 4318 (1997).
- [2] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi i S. R. Shenoy, “Quantum Coherent Atomic Tunneling between Two Trapped Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4950 (1997).
- [3] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner i P. Zoller, “Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [4] I. Bloch, “Ultracold quantum gases in optical lattices”, *Nat. Phys.* **1**, 23 (2005).
- [5] G. Gamow, “Zur Quantentheorie des Atomkernes”, *Zeitschrift für Phys.* **51**, 204 (1928).
- [6] R. W. Gurney i E. U. Condon, “Wave Mechanics and Radioactive Disintegration”, *Nature* **122**, 439 (1928).
- [7] P. Talou, D. Strottman i N. Carjan, “Exact calculation of proton decay rates from excited states in spherical nuclei”, *Phys. Rev. C* **60**, 054318 (1999).
- [8] P. Talou, N. Carjan, C. Negrevergne i D. Strottman, “Exact dynamical approach to spherical ground-state proton emitters”, *Phys. Rev. C* **62**, 014609 (2000).
- [9] T. Maruyama, T. Oishi, K. Hagino i H. Sagawa, “Time-dependent approach to many-particle tunneling in one dimension”, *Phys. Rev. C* **86**, 044301 (2012).
- [10] T. Oishi, L. Fortunato i A. Vitturi, “Two-fermion emission from spin-singlet and triplet resonances in one dimension”, *J. Phys. G* **45**, 105101 (2018).
- [11] T. Oishi i L. Fortunato, “Time-dependent Method for Many-body Problems and Its Application to Nuclear Resonant Systems”, *Acta Phys. Pol. B* **49**, 293 (2018).
- [12] A. B. Balantekin i N. Takigawa, “Quantum tunneling in nuclear fusion”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 77 (1998).
- [13] B. S. Bhandari, “Resonant tunneling and the bimodal symmetric fission of  $^{258}\text{Fm}$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1034 (1991).
- [14] M. Vatasescu, O. Dulieu, C. Amiot, D. Comparat, C. Drag, V. Kokoouline, F. Masnou-Seeuws i P. Pillet, “Multichannel tunneling in the  $\text{Cs}_2\text{O}_g^-$  photoassociation spectrum”, *Phys. Rev. A* **61**, 044701 (2000).
- [15] J. Keller i J. Weiner, “Direct measurement of the potential-barrier height in the  $B^1\Pi_u$  state of the sodium dimer”, *Phys. Rev. A* **29**, 2943 (1984).
- [16] B. Ricco i M. Y. Azbel, “Physics of resonant tunneling. The one-dimensional double-barrier case”, *Phys. Rev. B* **29**, 1970 (1984).

- [17] M. Razavy, *Quantum Theory of Tunneling* (World Scientific, 2003).
- [18] M. Ueda i A. J. Leggett, “Macroscopic Quantum Tunneling of a Bose-Einstein Condensate with Attractive Interaction”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1576 (1998).
- [19] L. Salasnich, A. Parola i L. Reatto, “Pulsed macroscopic quantum tunneling of falling Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **64**, 023601 (2001).
- [20] L. D. Carr, M. J. Holland i B. A. Malomed, “Macroscopic quantum tunnelling of Bose–Einstein condensates in a finite potential well”, *J. Phys. B* **38**, 3217 (2005).
- [21] P. Schlagheck i T. Paul, “Complex-scaling approach to the decay of Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **73**, 023619 (2006).
- [22] J. A. M. Huhtamäki, M. Möttönen, J. Ankerhold i S. M. M. Virtanen, “Effects of interactions and noise on tunneling of Bose-Einstein condensates through a potential barrier”, *Phys. Rev. A* **76**, 033605 (2007).
- [23] X. Zhao, D. A. Alcalá, M. A. McLain, K. Maeda, S. Potnis, R. Ramos, A. M. Steinberg i L. D. Carr, “Macroscopic quantum tunneling escape of Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **96**, 063601 (2017).
- [24] A. O. Gogolin, A. A. Nersisyan i A. M. Tsvelik, *Bosonization and Strongly Correlated Systems* (Cambridge University Press, 2004).
- [25] T. P. Meyrath, F. Schreck, J. L. Hanssen, C.-S. Chuu i M. G. Raizen, “Bose-Einstein condensate in a box”, *Phys. Rev. A* **71**, 041604 (2005).
- [26] K. Henderson, C. Ryu, C. MacCormick i M. G. Boshier, “Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for Bose–Einstein condensates”, *New J. Phys.* **11**, 043030 (2009).
- [27] J. J. P. van Es, P. Wicke, A. H. van Amerongen, C. Rétif, S. Whitlock i N. J. van Druten, “Box traps on an atom chip for one-dimensional quantum gases”, *J. Phys. B* **43**, 155002 (2010).
- [28] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband i W. Ketterle, “Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- [29] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch i T. Esslinger, “Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [30] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles i C. Salomon, “Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [31] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl i T. Esslinger, “Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 130403 (2004).
- [32] F. Serwane, G. Zürn, T. Lompe, T. B. Ottenstein, A. N. Wenz i S. Jochim, “Deterministic Preparation of a Tunable Few-Fermion System”, *Science* **332**, 336 (2011).
- [33] C. J. Pethick i H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, 2008).
- [34] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne i E. Tiesinga, “Feshbach resonances in ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).



- 
- [35] G. Zürn, F. Serwane, T. Lompe, A. N. Wenz, M. G. Ries, J. E. Bohn i S. Jochim, “Fermionization of two distinguishable fermions”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 075303 (2012).
- [36] G. Zürn, A. N. Wenz, S. Murmann, A. Bergschneider, T. Lompe i S. Jochim, “Pairing in few-fermion systems with attractive interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 175302 (2013).
- [37] S. Kim i J. Brand, “Decay modes of two repulsively interacting bosons”, *J. Phys. B* **44**, 195301 (2011).
- [38] M. Rontani, “Tunneling Theory of Two Interacting Atoms in a Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 115302 (2012).
- [39] S. Hunn, K. Zimmermann, M. Hiller i A. Buchleitner, “Tunneling decay of two interacting bosons in an asymmetric double-well potential: A spectral approach”, *Phys. Rev. A* **87**, 043626 (2013).
- [40] M. Rontani, “Pair tunneling of two atoms out of a trap”, *Phys. Rev. A* **88**, 043633 (2013).
- [41] D. N. Maksimov i A. R. Kolovsky, “Escape dynamics of a Bose-Hubbard dimer out of a trap”, *Phys. Rev. A* **89**, 063612 (2014).
- [42] P. M. Krassovitskiy i F. M. Pen'kov, “Contribution of resonance tunneling of molecule to physical observables”, *J. Phys. B* **47**, 225210 (2014).
- [43] S. E. Gharashi i D. Blume, “Tunneling dynamics of two interacting one-dimensional particles”, *Phys. Rev. A* **92**, 033629 (2015).
- [44] R. Lundmark, C. Forssén i J. Rotureau, “Tunneling theory for tunable open quantum systems of ultracold atoms in one-dimensional traps”, *Phys. Rev. A* **91**, 041601 (2015).
- [45] E. Fasshauer i A. U. J. Lode, “Multiconfigurational time-dependent Hartree method for fermions: Implementation, exactness, and few-fermion tunneling to open space”, *Phys. Rev. A* **93**, 033635 (2016).
- [46] I. S. Ishmukhamedov i V. S. Melezhik, “Tunneling of two bosonic atoms from a one-dimensional anharmonic trap”, *Phys. Rev. A* **95**, 062701 (2017).
- [47] G. García-Calderón i R. Romo, “Buildup of symmetrization entanglement for the nonescape probability of two identical particles”, *Phys. Rev. A* **96**, 062124 (2017).
- [48] I. S. Ishmukhamedov i A. S. Ishmukhamedov, “Tunneling of two interacting atoms from excited states”, *Physica E* **109**, 24 (2019).
- [49] A. del Campo, F. Delgado, G. García-Calderón, J. G. Muga i M. G. Raizen, “Decay by tunneling of bosonic and fermionic Tonks-Girardeau gases”, *Phys. Rev. A* **74**, 013605 (2006).
- [50] A. U. J. Lode, A. I. Streltsov, O. E. Alon, H.-D. Meyer i L. S. Cederbaum, “Exact decay and tunnelling dynamics of interacting few-boson systems”, *J. Phys. B* **42**, 044018 (2009).
- [51] A. U. J. Lode, A. I. Streltsov, K. Sakmann, O. E. Alon i L. S. Cederbaum, “How an interacting many-body system tunnels through a potential barrier to open space”, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **109**, 13521 (2012).
- [52] M. Pons, D. Sokolovski i A. del Campo, “Fidelity of fermionic-atom number states subjected to tunneling decay”, *Phys. Rev. A* **85**, 022107 (2012).

- [53] P. O. Bugnion i G. J. Conduit, “Ferromagnetic spin correlations in a few-fermion system”, *Phys. Rev. A* **87**, 060502 (2013).
- [54] A. U. J. Lode, S. Klaiman, O. E. Alon, A. I. Streltsov i L. S. Cederbaum, “Controlling the velocities and the number of emitted particles in the tunneling to open space dynamics”, *Phys. Rev. A* **89**, 053620 (2014).
- [55] P. Kościk, “Decay properties of unstable Tonks-Girardeau gases from a split trap”, (2020), [arXiv:2001.01508v2](https://arxiv.org/abs/2001.01508v2).
- [56] I. Bloch, J. Dalibard i W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [57] E. Haller, M. Gustavsson, M. J. Mark, J. G. Danzl, R. Hart, G. Pupillo i H.-C. Nägerl, “Realization of an Excited, Strongly Correlated Quantum Gas Phase”, *Science* **325**, 1224 (2009).
- [58] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac i M. Rigol, “One dimensional bosons: From condensed matter systems to ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1405 (2011).
- [59] A. N. Wenz, G. Zürn, S. Murmann, I. Brouzos, T. Lompe i S. Jochim, “From Few to Many: Observing the Formation of a Fermi Sea One Atom at a Time”, *Science* **342**, 457 (2013).
- [60] S. Murmann, F. Deuretzbacher, G. Zürn, J. Bjerlin, S. M. Reimann, L. Santos, T. Lompe i S. Jochim, “Antiferromagnetic Heisenberg Spin Chain of a Few Cold Atoms in a One-Dimensional Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 215301 (2015).
- [61] T. D. Lee, K. Huang i C. N. Yang, “Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties”, *Phys. Rev.* **106**, 1135 (1957).
- [62] M. Olshanii, “Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).
- [63] T. Bergeman, M. G. Moore i M. Olshanii, “Atom-Atom Scattering under Cylindrical Harmonic Confinement: Numerical and Analytic Studies of the Confinement Induced Resonance”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 163201 (2003).
- [64] J. Dobrzyniecki i T. Sowiński, “Dynamics of a few interacting bosons escaping from an open well”, *Phys. Rev. A* **98**, 013634 (2018).
- [65] J. Dobrzyniecki i T. Sowiński, “Momentum correlations of a few ultracold bosons escaping from an open well”, *Phys. Rev. A* **99**, 063608 (2019).
- [66] E. H. Lieb i W. Liniger, “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State”, *Phys. Rev.* **130**, 1605 (1963).
- [67] E. H. Lieb, “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum”, *Phys. Rev.* **130**, 1616 (1963).
- [68] M. Gaudin, “Boundary Energy of a Bose Gas in One Dimension”, *Phys. Rev. A* **4**, 386 (1971).
- [69] T. Karpiuk, P. Deuar, P. Bienias, E. Witkowska, K. Pawłowski, M. Gajda, K. Rzążewski i M. Brewczyk, “Spontaneous Solitons in the Thermal Equilibrium of a Quasi-1D Bose Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 205302 (2012).

- 
- [70] T. Karpiuk, T. Sowiński, M. Gajda, K. Rzążewski i M. Brewczyk, “Correspondence between dark solitons and the type II excitations of the Lieb-Liniger model”, *Phys. Rev. A* **91**, 013621 (2015).
- [71] A. Syrwid i K. Sacha, “Lieb-Liniger model: Emergence of dark solitons in the course of measurements of particle positions”, *Phys. Rev. A* **92**, 032110 (2015).
- [72] A. Syrwid i K. Sacha, “Quantum dark solitons in a Bose gas confined in a hard-wall box”, *Phys. Rev. A* **96**, 043602 (2017).
- [73] R. Ołdziejewski, W. Górecki, K. Pawłowski i K. Rzążewski, “Many-body solitonlike states of the bosonic ideal gas”, *Phys. Rev. A* **97**, 063617 (2018).
- [74] W. Golletz, W. Górecki, R. Ołdziejewski i K. Pawłowski, “Dark solitons revealed in Lieb-Liniger eigenstates”, (2019), [arXiv:1905.04604v2](https://arxiv.org/abs/1905.04604v2).
- [75] M. T. Batchelor, X. W. Guan, N. Oelkers i C. Lee, “The 1D interacting Bose gas in a hard wall box”, *J. Phys. A* **38**, 7787 (2005).
- [76] M. Takahashi, *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models* (Cambridge University Press, 2005).
- [77] T. Busch, B.-G. Englert, K. Rzążewski i M. Wilkens, “Two Cold Atoms in a Harmonic Trap”, *Found. Phys.* **28**, 549 (1998).
- [78] M. Girardeau, “Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension”, *J. Math. Phys.* **1**, 516 (1960).
- [79] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, 1976).
- [80] L. A. Khalfin, “Contribution to the decay theory of a quasi-stationary state”, *Sov. Phys. JETP* **6**, 1053 (1958).
- [81] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, M. C. Fischer, K. W. Madison, P. R. Morrow, Q. Niu, B. Sundaram i M. G. Raizen, “Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling”, *Nature* **387**, 575 (1997).
- [82] L. Fonda i G. C. Ghirardi, “Some remarks on the origin of the deviations from the exponential decay law of an unstable particle”, *Nuovo Cim. A* **7**, 180 (1972).
- [83] W. van Dijk i Y. Nogami, “Analytical approach to the wave function of a decaying quantum system”, *Phys. Rev. C* **65**, 024608 (2002).
- [84] C. Rothe, S. I. Hintschich i A. P. Monkman, “Violation of the Exponential-Decay Law at Long Times”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 163601 (2006).
- [85] J. G. Muga, F. Delgado, A. del Campo i G. García-Calderón, “Role of initial state reconstruction in short- and long-time deviations from exponential decay”, *Phys. Rev. A* **73**, 052112 (2006).
- [86] C. Y. She, W. M. Fairbank i K. W. Billman, “Measuring the velocity of individual atoms in real time”, *Opt. Lett.* **2**, 30 (1978).
- [87] C. L. Pan, J. V. Prodan, W. M. Fairbank i C. Y. She, “Detection of individual atoms in helium buffer gas and observation of their real-time motion”, *Opt. Lett.* **5**, 459 (1980).
- [88] J. V. Prodan, C. Y. She i W. M. Fairbank Jr., “An atomic fluorescence transit-time velocimeter”, *Opt. Commun.* **43**, 215 (1982).
- [89] H. Mabuchi, Q. A. Turchette, M. S. Chapman i H. J. Kimble, “Real-time detection of individual atoms falling through a high-finesse optical cavity”, *Opt. Lett.* **21**, 1393 (1996).

- [90] A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl i T. Esslinger, “Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
- [91] T. Bondo, M. Hennrich, T. Legero, G. Rempe i A. Kuhn, “Time-resolved and state-selective detection of single freely falling atoms”, *Opt. Commun.* **264**, 271 (2006).
- [92] D. Heine, W. Rohringer, D. Fischer, M. Wilzbach, T. Raub, S. Loziczky, X. Liu, S. Groth, B. Hessmo i J. Schmiedmayer, “A single-atom detector integrated on an atom chip: fabrication, characterization and application”, *New J. Phys.* **12**, 095005 (2010).
- [93] E. Altman, E. Demler i M. D. Lukin, “Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations”, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- [94] L. Mathey, E. Altman i A. Vishwanath, “Noise Correlations in One-Dimensional Systems of Ultracold Fermions”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 240401 (2008).
- [95] L. Mathey, A. Vishwanath i E. Altman, “Noise correlations in low-dimensional systems of ultracold atoms”, *Phys. Rev. A* **79**, 013609 (2009).
- [96] B. B. Brandt, C. Yannouleas i U. Landman, “Two-point momentum correlations of few ultracold quasi-one-dimensional trapped fermions: Diffraction patterns”, *Phys. Rev. A* **96**, 053632 (2017).
- [97] B. B. Brandt, C. Yannouleas i U. Landman, “Interatomic interaction effects on second-order momentum correlations and Hong-Ou-Mandel interference of double-well-trapped ultracold fermionic atoms”, *Phys. Rev. A* **97**, 053601 (2018).
- [98] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler i T. Pfau, “Bose-Einstein Condensation of Chromium”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160401 (2005).
- [99] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein i T. Pfau, “The physics of dipolar bosonic quantum gases”, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 126401 (2009).
- [100] R. Löw, H. Weimer, J. Nipper, J. B. Balewski, B. Butscher, H. P. Büchler i T. Pfau, “An experimental and theoretical guide to strongly interacting Rydberg gases”, *J. Phys. B* **45**, 113001 (2012).
- [101] J. Deiglmayr, “Long-range interactions between Rydberg atoms”, *Phys. Scr.* **91**, 104007 (2016).
- [102] G. Pupillo, A. Micheli, M. Boninsegni, I. Lesanovsky i P. Zoller, “Strongly Correlated Gases of Rydberg-Dressed Atoms: Quantum and Classical Dynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 223002 (2010).
- [103] J. E. Johnson i S. L. Rolston, “Interactions between Rydberg-dressed atoms”, *Phys. Rev. A* **82**, 033412 (2010).
- [104] N. Henkel, R. Nath i T. Pohl, “Three-Dimensional Roton Excitations and Supersolid Formation in Rydberg-Excited Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 195302 (2010).
- [105] J. Honer, H. Weimer, T. Pfau i H. P. Büchler, “Collective Many-Body Interaction in Rydberg Dressed Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 160404 (2010).
- [106] W. Li, L. Hamadeh i I. Lesanovsky, “Probing the interaction between Rydberg-dressed atoms through interference”, *Phys. Rev. A* **85**, 053615 (2012).
- [107] Y.-Y. Jau, A. M. Hankin, T. Keating, I. H. Deutsch i G. W. Biedermann, “Entangling atomic spins with a Rydberg-dressed spin-flip blockade”, *Nat. Phys.* **12**, 71 (2016).

- 
- [108] J. Zeiher, R. van Bijnen, P. Schauß, S. Hild, J. Choi, T. Pohl, I. Bloch i C. Gross, “Many-body interferometry of a Rydberg-dressed spin lattice”, *Nat. Phys.* **12**, 1095 (2016).
- [109] M. Płodzień, G. Lochead, J. de Hond, N. J. van Druten i S. Kokkelmans, “Rydberg dressing of a one-dimensional Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **95**, 043606 (2017).
- [110] P. Kościk i T. Sowiński, “Exactly solvable model of two interacting Rydberg-dressed atoms confined in a two-dimensional harmonic trap”, *Sci. Rep.* **9**, 12018 (2019).
- [111] M. D. Lukin, M. Fleischhauer, R. Cote, L. M. Duan, D. Jaksch, J. I. Cirac i P. Zoller, “Dipole Blockade and Quantum Information Processing in Mesoscopic Atomic Ensembles”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037901 (2001).
- [112] D. Tong, S. M. Farooqi, J. Stanojevic, S. Krishnan, Y. P. Zhang, R. Côté, E. E. Eyler i P. L. Gould, “Local Blockade of Rydberg Excitation in an Ultracold Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 063001 (2004).
- [113] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, Inc., 1995).
- [114] P. Kościk i T. Sowiński, “Exactly solvable model of two trapped quantum particles interacting via finite-range soft-core interactions”, *Sci. Rep.* **8**, 48 (2018).
- [115] R. Onofrio, “Physics of our Days: Cooling and thermometry of atomic Fermi gases”, *Phys.-Usp.* **59**, 1129 (2016).
- [116] F. Williams, *Topics in Quantum Mechanics* (Springer Science+Business Media, 2003).
- [117] J. G. Muga, J. P. Palao, B. Navarro i I. L. Egusquiza, “Complex absorbing potentials”, *Phys. Rep.* **395**, 357 (2004).
- [118] U. V. Riss i H.-D. Meyer, “Investigation on the reflection and transmission properties of complex absorbing potentials”, *J. Chem. Phys.* **105**, 1409 (1996).
- [119] S. Selstø i S. Kvaal, “Absorbing boundary conditions for dynamical many-body quantum systems”, *J. Phys. B* **43**, 065004 (2010).