



Poznań, 27 grudnia 2023 roku

prof. dr hab. Ireneusz Weymann  
Instytut Spintroniki i Informatyki Kwantowej  
Wydział Fizyki  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tani Paul  
pt. “Effect of excitons in quantum spin Hall effect”**

Rozprawa doktorska pt. „*Effect of excitons in quantum spin Hall effect*” została przygotowana pod opieką dra Timo Hyarta i dra hab. Wojciecha Brzezickiego w Międzynarodowym Centrum Sprzężenia Magnetyzmu i Nadprzewodnictwa z Materią Topologiczną - MagTop w Instytucie Fizyki Polskiej Akademii Nauk. Głównym celem dysertacji było wyjaśnienie wpływu korelacji kulombowskich prowadzących do tworzenia się ekscytonów na własności kwantowego spinowego efektu Halla w układach studni kwantowych. Wykazano, że obecność kondensatu ekscytonowego prowadzi do powstania nowej fazy izolującej ze spontanicznie złamaną symetrią względem odwrócenia czasu, która tworzy się pomiędzy fazą trywialną i nietrywialną spinowego kwantowego izolatora Halla. W ramach dysertacji zaproponowano układ doświadczalny w geometrii dysku Corbino do eksperymentalnej weryfikacji istnienia powyższej fazy. Ponadto, zaproponowano również układ hybrydowy, w którym kwantowy spinowy izolator Halla w fazie ze złamaną symetrią jest sprzężony do dwóch nadprzewodników w geometrii złącza Josephsona. Układ taki wykazuje istnienie zero-energetycznych stanów Majorany, które tworzą się na interfejsach. Badania przedstawione w dysertacji wpisują się w najnowsze trendy badawcze w fizyce ciała stałego rozwijane w najlepszych ośrodkach na świecie, obejmujące struktury dwuwymiarowe, materiały topologiczne, zjawiska korelacyjne, a także egzotyczne *quasi*-cząstki Majorany, które są intensywnie badane ze względu na potencjalne zastosowania do topologicznych obliczeń kwantowych. Wyniki uzyskane przez doktorantkę zostały przedstawione w dwóch artykułach naukowych: T. Paul, V. Fernandez Becerra, T. Hyart, *Interplay of quantum spin Hall effect and spontaneous time-reversal symmetry breaking in electron-hole bilayers. I. Transport properties*, Phys. Rev. B **106**, 235420 (2022) oraz T. Paul, V. Fernandez Becerra, T. Hyart, *Interplay of quantum spin Hall effect and spontaneous time-reversal symmetry breaking in electron-hole bilayers. II. Zero-field topological superconductivity*, Phys. Rev. B **106**, 235421 (2022), które ukazały się jako cykl w czasopiśmie *Physical Review B*. Doktorantka wygłosiła również trzy referaty, w tym jeden na zaproszenie.

Od strony formalnej rozprawa doktorska składa się z sześciu rozdziałów oraz liczącej 155 pozycji bibliografii. Dysertacja została przygotowana w języku angielskim, zawiera również streszczenie w języku polskim. Rozdział pierwszy prezentuje ogólne wprowadzenie do tematyki rozprawy. Doktorantka najpierw opisuje kwantowy efekt Halla, gdzie do wyjaśnienia kwantyzacji oporności Halla wprowadza pojęcia związane z topologią struktury pasmowej: fazę i krzywiznę Berry’ego oraz liczbę Cherna. Kolejny podrozdział jest poświęcony omówieniu kwantowego anomalnego zjawiska Halla. Mgr Tania Paul przedstawia najpierw model Haldane’a dla układów o strukturze plastra miodu, a w dalszej części opisuje

dwupasmowy model Qi-Wu-Zhanga. Kwantowy spinowy efekt Halla jest omówiony w rozdziale 1.3 na podstawie modelu Kane'a i Mele'a dla grafenu. Doktorantka opisuje szczegółowo warunki prowadzące do powstania helikalnych stanów krawędziowych, a także odnosi się krótko do modelu Bernevig'a, Hughes'a i Zhang'a (BHZ), który opisuje kwantowy spinowy efekt Halla w studniach kwantowych. Model ten, opisany szczegółowo w rozdziale drugim, jest stosowany w całej dysertacji do analizy własności kwantowego spinowego efektu Halla w obecności ekscytonów. W dalszej części rozdziału pierwszego doktorantka krótko opisuje rolę korelacji elektronowych wskazując, że właśnie korelacje kulombowskie mogą być źródłem braku topologicznej protekcji stanów brzegowych w pewnych materiałach. Rozdział 1.5 przedstawia wprowadzenie do tematyki *quasi*-cząstek Majorany. Na podstawie łańcucha Kitaev'a doktorantka demonstrowuje, że w fazie topologicznej na końcach drutu tworzą się zero-energetyczne mody Majorany. Wskazano również na możliwe eksperymentalne realizacje modów Majorany w układach hybrydowych z izolatorem topologicznym i nadprzewodnikiem. Kolejny podrozdział jest poświęcony wprowadzeniu do teorii kwantowego transportu – doktorantka przedstawia równania transportu w formalizmie macierzy rozpraszania prezentując formułę Landauera na prąd i przewodność różniczkową. W ostatniej części rozdziału pierwszego przedstawiono motywację do prowadzenia badań podjętych w dysertacji, a także zdefiniowano hipotezy badawcze rozprawy doktorskiej.

Rozdział drugi jest w całości poświęcony omówieniu i analizie modelu BHZ opisującego kwantowy spinowy efekt Halla w studniach kwantowych. Model ten został zaproponowany w 2006 roku dla studni kwantowych zbudowanych z warstwy tellurku rtęci osadzonej pomiędzy warstwami tellurku kadmu (studnie kwantowe typu I). Topologiczne przejście fazowe od fazy trywialnego izolatora do fazy kwantowego spinowego izolatora Halla następuje wraz ze wzrostem grubości warstwy HgTe, co zostało doświadczalnie potwierdzone rok później w grupie Laurensa Molenkampa na Uniwersytecie w Würzburgu. Kwantowy spinowy efekt Halla został również zrealizowany w podwójnych studniach kwantowych opartych na dwóch warstwach arsenku indu i antymonku galu umieszczonych pomiędzy antymonkiem glinu (studnie kwantowe typu II), w których przejście fazowe można dodatkowo kontrolować przy pomocy napięć bramkujących. Właśnie tego typu układy dwuwarstwowe są głównym przedmiotem badań niniejszej dysertacji. Kwantowy spinowy efekt Halla w studniach kwantowych można opisać teoretycznie przy pomocy efektywnego modelu czteropasmowego, przedstawionego w rozdziale 2.2 (wzór (2.1)). Model ten zawiera człon opisujący przerwę energetyczną pomiędzy odpowiednimi pasmami dziurowymi i elektronowymi ( $E_G$ ), człon związany z międzypasmowym tunelowaniem ( $A$ ), a także wyraz opisujący asymetrię związaną z inwersją przestrzenną ( $\Delta_z$ ). W rozdziale drugim omówiono własności studni kwantowych zarówno typu I, jak i typu II. Po przedstawieniu modelu BHZ omówiono odpowiednie symetrie układu, a także przedstawiono parametry modelowe stosowane w obliczeniach. Jako jednostki do określenia parametrów wykorzystano energię wiązania ekscytonu oraz ekscytonowy promień Bohra – szkoda, że nie podano w tym miejscu jakiego rzędu są te wielkości. W dalszej części rozprawy przedstawiono wyniki dotyczące struktury pasmowej dla obu typów studni kwantowych w przypadku, gdy istnieje asymetria pomiędzy masami efektywnymi dziur i elektronów, a także gdy uwzględniono człon związany z asymetrią inwersji przestrzennej. Wyniki wskazują, że o ile drugi człon prowadzi do zamknięcia przerwy energetycznej dla skończonej wartości wektora falowego w przypadku dwuwarstwowych studni kwantowych, asymetria mas nie odgrywa istotnej roli. Spektrum energetyczne pokazano jednak w dość dużej skali w stosunku do wartości  $\Delta_z$ , stąd też trudno oczekiwać widocznych zmian na przedstawionych rysunkach. Na rysunkach nie widać również wspomnianego przesunięcia zamknięcia przerwy energetycznej od punktu  $\Gamma$  - przydatny byłby dodatkowy rysunek, który

ilustrowałby ten efekt. Doktorantka pisze skrótowo „In the calculations presented here...” jednak w dysertacji, za wyjątkiem krótkiej informacji, że do obliczeń wykorzystano pakiet kwant, brak bliższych szczegółów jak przeprowadzono konkretne obliczenia. Dlatego chciałbym, aby podczas obrony pracy doktorskiej doktorantka przedstawiła więcej szczegółów odnośnie przeprowadzonych obliczeń, zarówno numerycznych, jak i analitycznych. Rozdział 2.7 jest poświęcony omówieniu zachowania niezmiennika topologicznego układu w sytuacji gdy  $\Delta_z=0$  oraz w przypadku gdy  $\Delta_z$  jest skończone. W tej drugiej sytuacji własności topologiczne są określane poprzez odpowiedni pfaffian, który został przedstawiony na rysunku 2.8 (warto byłoby przypomnieć w opisie rysunku dla jakich parametrów przeprowadzono obliczenia). W ostatniej części rozdziału drugiego omówiono wpływ pola magnetycznego przyłożonego prostopadle oraz w płaszczyźnie próbki na kwantowy spinowy efekt Halla, a także przeanalizowano rolę nieporządku, wskazując na istotne różnice pomiędzy studniami kwantowymi typu I i typu II. Warto byłoby uzupełnić przedstawione stwierdzenia adekwatnymi wynikami i rysunkami. Ponadto, w opisie brakuje bardziej szczegółowych informacji o tym, w jaki sposób i jakiego rodzaju nieporządek został uwzględniony.

Rozdział trzeci jest poświęcony omówieniu wpływu ekscytonów na kwantowy spinowy efekt Halla dla studni kwantowych typu II. Najpierw wskazano, że warunkiem tworzenia się kondensatu ekscytonowego jest bardzo małe sprzężenie pomiędzy pasmami elektronowymi i dziurowymi. Warunek ten nie jest spełniony dla studni kwantowych typu I, dlatego ekscytony odgrywają istotną rolę tylko dla studni kwantowych opartych o elektronowo-dziurowe dwuwarstwy. Wprowadzono przybliżony potencjał modelujący ekscytony w dwuwarstwie i pokazano w jaki sposób można wyznaczyć ekscytonowe potencjały parujące o symetrii  $s$  i  $p$  w ramach przybliżenia pola średniego. Wartości rzeczywiste i urojone tych wielkości zostały wykreślone na rys. 3.1, wskazując na zakres wartości przerwy energetycznej, dla którego tworzy się faza ze spontanicznie złamaną symetrią odwrócenia czasu. Następnie zdefiniowano parametry porządku, związane odpowiednio z symetrią odwrócenia czasu oraz z parzystością. Przedstawiono także ich zależności od wielkości przerwy energetycznej oraz sprzężenia pomiędzy pasmem dziurowym i elektronowym, wskazując na odpowiednie fazy badanego układu.

Przy redagowaniu dłuższego tekstu naukowego trudno uniknąć drobnych niedociągnięć edytorskich, jednak w niniejszej rozprawie jest ich stosunkowo dużo, dlatego czuję się zobowiązany, by kilka z nich wymienić. Rozprawa zawiera wiele pomyłek gramatycznych, zwłaszcza jeżeli chodzi o stosowanie liczby mnogiej i pojedynczej (np.: resistance were, two bands depends, bands belongs, a ... quantum wells, path suggest, effect were, mass ... are, etc.), a także stylistycznych (np.: ...the gap between the electron and hole subbands decrease and cross each other at a critical magnetic field, Though the behavior...is still somewhat understood, The simplified mean-field term (3.1), successfully captures the qualitative features of the topological phase transition due to the presence of excitons in Ref. [85]) i tzw. literówek (np.: hobeycomb, zigag, the the, Al/Sb, Gamma, plarticle, dependant, etc.). Ponadto pojawiają się pewne nieścisłości co do definicji stosowanych wielkości, np.: wprowadzono dwie notacje dla macierzy Pauliego, jedną z indeksem dolnym (np. równania (1.10), (2.1), etc.) oraz drugą z indeksem górnym (np. równanie (1.12)). Wielkości  $\mu_1$  i  $\mu_2$  raz opisano jako poziomy Fermiego, a raz jako potencjały chemiczne (rozd. 1.6) – w ogólności to nie są tożsame wielkości. Parametr porządku związany z symetrią odwrócenia czasu został zdefiniowany jako  $T^{br}$ , a w opisie rysunków podano  $T_{br}$ . W tekście brak odnośników do niektórych rysunków przedstawionych w dysertacji (np.: do rys. 3.7). Mam również wątpliwości czy rysunek 1.7 właściwie prezentuje stany brzegowe w kwantowym spinowym efekcie Halla. Równania (2.5)

i (2.6) to w zasadzie jedno równanie. Choć powyższe uchybienia nie wpływają na wartość merytoryczną uzyskanych wyników, ich poprawa z pewnością przyczyni się do lepszego odbioru dysertacji, zwłaszcza przez osoby chcące zapoznać się z tematyką.

Kolejne dwa rozdziały są już wolne od uchybień redakcyjnych – rozdziały te stanowią dwa opublikowane artykuły naukowe, które przeszły odpowiednią korektę recenzencką oraz edytorską. Są to najważniejsze rozdziały rozprawy, ponieważ prezentują oryginalne wyniki uzyskane przez doktorantkę. Jak wynika z załączonych oświadczeń współautorów, wkład mgr Tani Paul w ich powstanie był wiodący – doktorantka przygotowała odpowiednie kody w języku Python, wykonała obliczenia z wykorzystaniem pakietu kwant, przeprowadziła analizę wyników, przygotowała rysunki oraz redagowała manuskrypty. Oba artykuły są poświęcone badaniu wpływu ekscytonów na kwantowy spinowy efekt Halla w elektronowo-dziurowych dwuwarstwach z odwróconą strukturą pasmową. W pierwszej publikacji pokazano, że obecność ekscytonów łamie symetrię związaną z odwróceniem czasu prowadząc do niekonwencjonalnego topologicznego przejścia fazowego, w którym nie obserwuje się zamknięcia przerwy energetycznej. W artykule zaproponowano układ w geometrii dysku Corbino do doświadczalnej weryfikacji istnienia takiej fazy poprzez pomiar przewodności objętościowej oraz brzegowej w funkcji gęstości elektronowej i dziurowej. Natomiast drugi artykuł jest poświęcony topologicznemu nadprzewodnictwu, które indukuje się, gdy studnia kwantowa w fazie ze spontanicznie złamaną symetrią jest dodatkowo sproksymowana przez nadprzewodnik typu *s*. Stany brzegowe takiego topologicznego nadprzewodnika wykazują cechy fermionów Majorany, które tworzą się na interfejsach układu w geometrii złącza Josephsona. W pracy zaproponowano efektywny model opisujący niskoenergetyczne zachowanie układu, wykazujący dobrą zgodność z wynikami numerycznymi. Pokazano, że występowanie modów Majorany można stwierdzić poprzez pomiar prądu Josephsona. Ponadto, zaproponowano protokół dla przeprowadzenia fuzji modów Majorany, którą można kontrolować poprzez napięcia bramkujące.

W mojej opinii oba artykuły prezentują bardzo ciekawe wyniki, które mają znaczenie dla głębszego zrozumienia i dalszego rozwoju fizyki układów dwuwymiarowych i ich topologicznych własności, a także fizyki *quasi*-cząstek Majorany, które w zaproponowanych nanostrukturach można wytworzyć bez konieczności przykładania zewnętrznego pola magnetycznego. Perspektywa ta została podkreślona przez doktorantkę w rozdziale szóstym, który przedstawia krótkie podsumowanie oraz omówienie wpływu uzyskanych wyników na dalszy rozwój dyscypliny.

### **Podsumowanie**

Uważam, że doktorantka wykazała się ogólną wiedzą teoretyczną w zakresie fizyki ciała stałego, a w szczególności fizyki układów dwuwymiarowych i materiałów topologicznych. W swojej dysertacji rozwiązała oryginalny problem naukowy, którym było określenie wpływu ekscytonów na diagram fazowy kwantowego spinowego efektu Halla dla studni kwantowych opartych na InAs/GaSb. Doktorantka wykazała istnienie nowej fazy izolującej ze spontanicznie złamaną symetrią względem odwrócenia czasu, zaproponowała układ doświadczalny do jej obserwacji, a także zasugerowała wykorzystanie takiej fazy do wytworzenia zero-energetycznych modów Majorany w geometrii złącza Josephsona. Dlatego uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymagania stawiane kandydatom do stopnia naukowego doktora przedstawione w Ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, oraz wnioskuje o dopuszczenie mgr Tani Paul do dalszych etapów postępowania o nadanie jej stopnia naukowego doktora w dyscyplinie nauki fizyczne.

*Jurek Wegmann*