# Zagadnienie pijanego marynarza

Tomasz Sowiński

**Ruchy Browna – czyli nieustający i chaotyczny ruch drobin zawieszonych w cieczy, odkryty w połowie XIX wieku przez szkockiego botanika, czekał na wyjaśnienie prawie 80 lat (MT 04/2008). Zostało ono podane przez Alberta Einsteina i Mariana Smoluchowskiego i stało się przełomowym momentem w fizyce statystycznej. Zanim jednak do tego dojdziemy, musimy na chwilę zmienić temat, na wydawałoby się, zupełnie inny.**


**Tomasz Sowiński** w 2005 roku skończył z wyróżnieniem studia na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w zakresie fizyki teoretycznej. Obecnie jest asystentem w Centrum Fizyki Teoretycznej PAN. Z zamiłowania zajmuje się popularyzacją nauki. W roku 2005 był nominowany do nagrody w konkursie Popularyzator Nauki organizowanym przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji oraz Polską Agencję Prasową.

## PIJANI MARYNARZE

W kontekście ruchów Browna, aby lepiej zrozumieć, na czym polega to zjawisko, bardzo często przytacza się tzw. **zagadnienie pijanego marynarza**. Zawsze bowiem łatwiej jest coś zrozumieć, gdy mamy do czynienia z obiektami, które potrafimy sobie wyobrazić, niż tak jak w przypadku malutkich drobin, musimy dać wiarę, że ich ruch obserwuje się pod mikroskopem. Na czym zatem polega zagadnienie pijanego marynarza?

Wyobraźmy sobie, że w pewnym portowym mieście jest rynek o dokładnie kolistym kształcie, którego promień wynosi 100 m. W samym środku tego rynku znajduje się pijalnia piwa, w której marynarze spędzają wolny czas. Na skutek wypitych trunków wyskokowych wychodzący z pijalni marynarze zupełnie nie kontrolują swojego zachowania. Z dobrą dokładnością można powiedzieć, że po wyjściu z pijalni ich ruch można scharakteryzować następująco: w każdej sekundzie pijany marynarz wykonuje krok o długości 1 m w całkowicie losowym kierunku. Ze względu na oczywisty stan marynarza kierunek, w którym wykonuje on krok, zupełnie nie zależy od tego, w jakim kierunku szedł wcześniej. Ruch jest zatem całkowicie chaotyczny i bez pamięci. Okazuje się, że w tym wydawałoby się całkowitym chaosie są jednak pewne reguły, które można ściśle matematycznie udowodnić.

Zanim przejdziemy do opisania pewnych ciekawych własności ruchu pijanych marynarzy, dodajmy, że taki chaotyczny ruch, w którym za każdym razem obiekt przesuwa się w losowym kierunku niezależnie od tego, jak poruszał się wcześniej, matematycy nazywają **procesem Wienera**. Nazwa została nadana dla uczczenia wybitnego amerykańskiego matematyka Norberta Wienera, którego uważa się za ojca cybernetyki.

## W TYM SZALEŃSTWIE JEST METODA

Choć ruch marynarza na rynku dla postronnego obserwatora wydaje się całkowicie chaotyczny, to rządzi nim jednak pewien ukryty porządek. Nie można go jednak dostrzec, obserwując jednego marynarza; potrzebujemy wielu z nich. Aby lepiej to zrozumieć, przeprowadźmy następujący eksperyment. Zbadajmy, jak zachowuje się cała gromada marynarzy, którzy wyszli z pijalni i poruszają się całkowicie niezależnie od siebie. Każdy z nich wykonuje oczywiście w każdej jednostce czasu krok o długości 1 m w losowym kierunku. Zamiast jednak patrzeć na każdego z nich osobno, popatrzmy na nich jak na jedną całość. Na ostatnich stronach artykułu zilustrowane są położenia 200 marynarzy w kolejnych chwilach czasu (1–15). W początkowej fazie oczywiście wszyscy marynarze są skupieni blisko centrum, z którego wystartowali. Choć każdy z nich szedł „po swojemu", to jednak nie

Pojedynczy obiekt badań

oddalił się od pijalni za daleko. Wraz z upływem czasu gromada rozpływa się równomiernie po rynku, jednak w każdej chwili gromada ta kształtem przypomina koło. Czasami troszkę powykrzywiane, ale jednak koło to najlepszy kształt, jakim można ją scharakteryzować.

Jak widać z zaprezentowanych ilustracji, ruch każdego z marynarzy rzeczywiście jest nieprzewidywalny i całkowicie chaotyczny. Jednak ewolucja marynarzy jako całej grupy jest dość prosta – grupa po prostu się „rozpływa". Ale to nie koniec rewelacji. Z zamieszczonych rysunków jasno wynika, że centrum grupy marynarzy zupełnie się nie przemieszcza i ciągle znajduje się w centrum rynku. Matematycznie można zatem powiedzieć, że **średnie położenie** marynarzy się nie zmienia i ciągle znajduje się w centrum. Krótko mówiąc: **średnio**, choć marynarze wykonują ciągły ruch, wcale się nie przemieszczają!!! Oczywiście, gdy patrzymy na konkretnego marynarza, to on się przemieszcza, ale podkreślmy jeszcze raz, że **średnio** marynarze stoją w miejscu! To taki mały paradoks, ale całkowicie zrozumiały, jeśli uświadomimy sobie, że średnie położenie niesie jedynie informacje bardzo zgrubną o położeniu wszystkich marynarzy jako całości, a nie każdego z nich osobno.

Z zaprezentowanych ilustracji jasno wynika, że ten nasz modelowy układ zmienia się w czasie. Choć średnie położenie nie zmienia się, to jednak już na pierwszy rzut oka widać, że wraz z upływem czasu zwiększa się promień koła, w którym można zamknąć wszystkich marynarzy. I choć znaczna ich liczba nadal znajduje się blisko środka, to są tacy, którzy oddalili się od centrum na znaczną odległość. Pytanie, jakie narzuca się od razu, brzmi: czy można jakoś zrozumieć, jak szybko rośnie promień tego koła? Odpowiedź jest powszechnie znana od czasów Smoluchowskiego i Ensteina brzmi: **TAK**!

Aby móc wyznaczyć prędkość rozszerzania się chmury pijanych marynarzy, musimy najpierw zdefiniować jakąś wielkość, którą będziemy mogli uznać za dobre określenie jej rozmiarów. W danej chwili położenie każdego marynarza względem centrum rynku jest dobrze określone. Naiwnie można by zatem przyjąć, że wielkością charakteryzującą promień chmury może być średnia arytmetyczna z odległości poszczególnych marynarzy od środka. Jak już jednak wspominaliśmy, wielkość ta raczej odpowiada położeniu środka chmury, a nie jej promieniowi i tym samym nie nadaje się do opisu zmian rozmiarów całej grupy.

Za wielkość, która dobrze charakteryzuje rozmiary chmury, moglibyśmy uznać średnią z kwadratów odległości marynarzy od środka rynku. Cóż to jest za wielkość? Otóż należy wziąć odległość każdego z marynarzy od centrum rynku, podnieść do kwadratu i obliczyć średnią arytmetyczną tak otrzymanych wielkości. Wielkość, którą otrzymamy w wyniku takiej procedury, nazywana jest w zagadnieniach statystycznych **wariancją**. Ogólnie rzecz ujmując, wariancja to wielkość mówiąca, jak bardzo dana wielkość w układzie jest rozmyta wokół wartości średniej. Im wariancja większa, tym większe rozmycie. W naszym przypadku wielkość, którą jesteśmy zainteresowani, to położenie marynarzy w stosunku do centrum rynku. Jak pamiętamy, średnie położenie podczas ewolucji się nie zmienia, tzn. środek chmury marynarzy wciąż jest w środku rynku. Zmienia się natomiast rozmycie wokół tej średniej – chmura marynarzy rozpływa się po całym rynku wraz z upływem czasu. To właśnie wariancja jest wielkością, która dobrze opisuje to rozmycie.


Teren badań

W tym miejscu musimy się jeszcze zatrzymać na chwilę i podkreślić jedną rzecz. Choć wariancja jest wielkością, która dobrze opisuje rozmycie chmury marynarzy, **nie można** jej utożsamić z promieniem tej chmury. Wynika to choćby z faktu, że jednostką wariancji jest metr do kwadratu [$m^2$]. Jest to przecież średnia z kwadratów odległości marynarzy od centrum. Promień chmury, jak przystało na każdą wielkość określającą długość, musi mieć wymiar metra [m]. Najprościej jest zatem utożsamić promień chmury marynarzy z **pierwiastkiem kwadratowym** z wariancji odległości.

Wyjątek nie wykonujący ruchów Browna

## JAK SZYBKO ROZPŁYWA SIĘ CHMURA?

No dobrze. Wiemy już sporo na temat zagadnienia pijanego marynarza. Nadal jednak nie mamy żadnego ilościowego wyniku, który pokazałby nam, jak szybko rozpływa się chmura pijanych marynarzy. Wiemy jedynie, choćby z naszego eksperymentu numerycznego, że proces ten następuje. Czas zatem przytoczyć ścisły matematyczny wynik charakteryzujący taki proces Wienera.

Wykorzystując zaawansowane metody rachunku prawdopodobieństwa, można udowodnić, że w procesie Wienera, w którym w każdym kroku czasowym cząstki (których liczba jest bardzo duża):

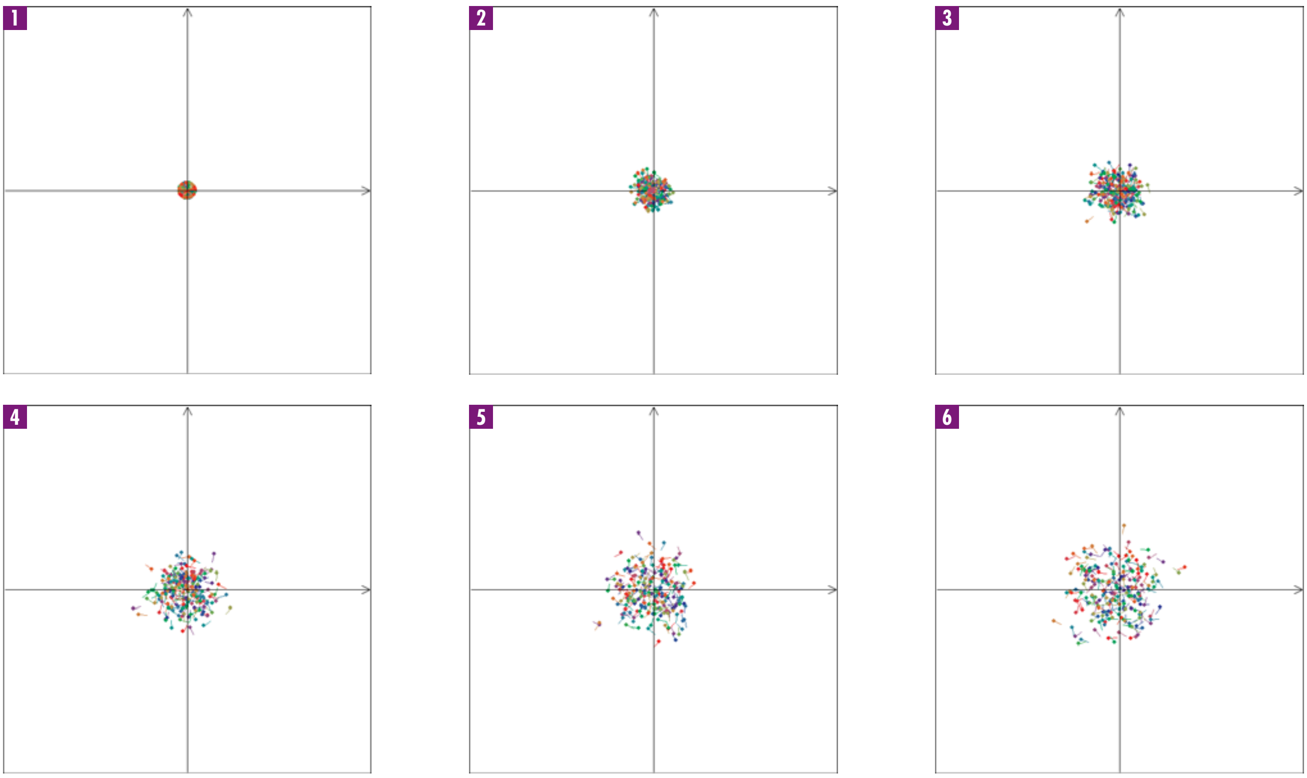
- przemieszczają się zupełnie niezależnie od siebie,
- wykonują ruch o odcinek określonej długości w całkowicie losowym kierunku,
- poruszają się bez pamięci, tzn. wylosowany kierunek ruchu nie zależy od kierunków wylosowanych wcześniej

**wariancja rozkładu ROŚNIE proporcjonalnie do czasu**! Choć nie przedstawimy dowodu tego matematycznego faktu, podkreślmy jeszcze raz, że jest to ściśle wyprowadzone prawo. To oznacza, że promień chmury, który utożsamiliśmy z pierwiastkiem kwadratowym z wariancji, rośnie jak pierwiastek z czasu. Chmura marynarzy rozszerza się zatem niejednostajnie i coraz wolniej, ale wg bardzo dobrze określonego prawa.

Formułując zagadnienie pijanych marynarzy, bardzo często stawia się pytanie: po jakim czasie od opuszczenia baru konkretny marynarz wyjdzie na zewnątrz rynku (jak pamiętamy, rynek był kolisty i miał promień 100 m). Odpowiedź na tak postawione pytanie nie jest prosta, bo ruch konkretnego marynarza jest bowiem nieprzewidywalny i całkowicie chaotyczny. Możemy na nie odpowiedzieć jedynie w sposób „średni" – zgodny z rachunkiem prawdopodobieństwa. Biorąc pod uwagę to wszystko, co powiedzieliśmy przed chwilą, odpowiedź ta musiałaby brzmieć następująco: **Średnie położenie marynarza nie zmienia się w czasie i znajduje ciągle w środku rynku, zatem przeciętny marynarz nigdy nie opuści rynku! Biorąc pod uwagę całą gromadę pijanych marynarzy, to wśród nich średnio znajdzie się taki, który dojdzie do granic rynku po czasie równym pierwiastkowi z promienia rynku wyrażonego w metrach (przyjęliśmy bowiem, że każdy marynarz wykonuje krok o długości jednego metra co jedną sekundę). Zatem dla rynku o promieniu 100 metrów chmura dotknie jego brzegu po 10 sekundach.** I choć odpowiedź ta wydaje się paradoksalna, to jednak jest jedyną możliwą w duchu rachunku prawdopodobieństwa, bez którego nie sposób zrozumieć losowego ruchu marynarzy.

## ALE GDZIE TU RUCHY BROWNA?

Niewątpliwie bardzo się zagłębiliśmy w zrozumienie zagadnienia pijanego marynarza i Czytelnikowi może się wydawać, że bardzo zboczyliśmy z tematu. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma to żadnego związku z ruchami Browna. Nic bardziej mylnego. Drobiny materii zanurzone w cieczy wykonują ruch bardzo podobny do ruchu wykonywanego przez osławionych przez nas marynarzy. One również w każdej chwili przemieszczają się w zupełnie losowym kierunku, całkowicie niezależnie od siebie. Gdy obserwujemy pojedynczą drobinę, nie potrafimy w jej ruchu znaleźć żadnej prawidłowości. Obserwując jed-



nak ich całe gromady, możemy badać własności statystyczne ich ruchu.

Istnieje pewna, wydawałoby się, fundamentalna różnica pomiędzy ruchem Browna drobin a ruchem marynarzy. Jak pamiętamy, marynarze w każdym kroku wykonywali krok o dobrze określonej długości (1 metr). Drobina zanurzona w cieczy za każdym razem przemieszcza się o inną odległość, którą można potraktować również jako całkowicie losową. Pomimo tak fundamentalnej różnicy okazuje się, że nie wpływa to znacząco na własności statystyczne ruchu drobin. Nadal jest bowiem tak, że średnie położenie drobiny nie będzie się zmieniało w czasie, a wariancja rozkładu będzie rosła liniowo z czasem. Okazuje się, że losowy charakter długości kroku, w odróżnieniu od losowości kierunku, nie ma dużego znaczenia na własności statystyczne rozkładu.

## PYTANIE WCIĄŻ BEZ ODPOWIEDZI

No dobrze. Wiemy zatem, że drobiny wykonujące ruchy Browna zachowują się jak pijani marynarze. Ale co z tego? Gdzie jest wytłumaczenie tego ruchu?

Jesteśmy już prawie przygotowani do znalezienia źródła ruchów Browna. Brakuje nam tylko jeszcze jednej cegiełki, którą wniósł do fizyki szkocki fizyk

Początkowa faza experymentu

James Clerk Maxwell. Ten sam, który sformułował cztery prawa elektrodynamiki (MT 04/2006). O tym jednak opowiemy już w przyszłym miesiącu. Obiecuję, że wtedy tajemnica ruchów Browna zostanie ostatecznie rozwiązana. Zapraszam! ●

Symulacja przeprowadzona za pomocą programu Smoluchowski załączonego do książki I. Białynicki-Birula, I. Białynicka-Birula „Modelowanie Rzeczywistości”, WNT 2006.