

Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 4-11-2009

Oscylator Harmoniczny

Jednostki bezwymiarowe

Wybieramy jednostki pozycji $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ i energii $E_0 = \hbar\omega$. Wtedy

$$x \rightarrow xx_0, \quad E \rightarrow EE_0,$$

Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2} [-\nabla^2 + x^2] = a^\dagger a + \frac{1}{2}$$

Energie

$$E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wygodnie jest także wybrać jednostki pędu p_0 aby po podstawieniu $p \rightarrow pp_0$ mieć

$$p = -i \frac{d}{dx}.$$

Operatory anihilacji i kreacji:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x + \frac{d}{dx} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{x + ip\} \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x - \frac{d}{dx} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{x - ip\} \\ [a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \end{aligned}$$

Funkcje własne

$$\psi_n = \frac{e^{-x^2/2} H_n[x]}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \quad H_n[x] = 1, 2x, -2(1 - 2x^2), \dots$$

Ćwiczenia

0. Jednostki bezwymiarowe - pytania:

- Jaka jest wymagana wartość p_0 aby w tym systemie $p = -i \frac{d}{dx}$?
- Jaki ma wymiar funkcja falowa ψ_n ?
- Jaki mają wymiar operatory anihilacji i kreacji? Wskazówka: Ilość cząstek jest $a^\dagger a$.
- Zaczynając od bezwymiarowego wyrażenia powyżej, napisz operator a w jednostkach wymiarowych.

- Pokaż że działanie operatorem a na stan podstawowy ψ_0 daje stany własne o kolejnych ilościach kwantów.
- Używając ten sposób i wielomian Hermite'a $H_2[x]$ dany powyżej, oblicz stan własny ψ_3 w bazie X .
- Wyrysuj schematycznie stany własne z liczbami kwantowymi 0, 1, 2, 3 i 9.
- Wyznacz $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, i $\langle P^2 \rangle$ w stanie podstawowym ψ_0 .
- Wykaż że średnia wartość energii kinetycznej jest równa średniej wartości energii potencjalnej. (Jest to szczególna forma twierdzenia o wiriale.)
Wskazówka: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} [a + a^\dagger]$, i najlepiej zacząć od wyznaczenia energii potencjalnej.
- Znajdź poziomy energetyczne oscylatora harmonicznego w stałym polu sił $F_{\text{ex}} = F$, a więc kiedy potencjał jest

$$\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - Fx.$$

Wskazówka: nie trzeba rozwiązywać problemu od nowa!