Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 28-10-2009
Relacje nieoznaczoności Heisenberga

Powtórka:

Nieoznaczoności operatora W są zdefiniowane jako pierwiastek ze średniej wariancji:

$$(\Delta W)^2 = \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2.$$

gdzie $\langle Y \rangle$ są średnimi wartościami $\langle \psi | Y | \psi \rangle$ operatora Y w stanie $|\psi\rangle$. Można to także zwięźlej napisac jako $(\Delta W)^2 = \langle (\delta W)^2 \rangle$ używając odchylenia

$$\delta W = W - \langle W \rangle.$$

Teraz, ogólnie, dla operatorów Hermitowskich Ω i Λ, gdzie

$$[\Omega, \Lambda] = i\Gamma,$$

mamy relacje nieoznaczoności:

$$(\Delta\Omega)^2 (\Delta\Lambda)^2 \quad \geq \quad \frac{1}{4}\langle \delta\Omega\delta\Lambda + \delta\Lambda\delta\Omega \rangle + \frac{1}{4}\langle \Gamma \rangle. \quad \geq \quad \frac{\langle \Gamma \rangle}{4}$$

Znak równości występuje kiedy

$$\delta\Omega|\psi\rangle = c\,\delta\Lambda|\psi\rangle$$

z jakąś stałą c.

Ćwiczenia

1. Mamy obiekt o masie 1g którego pozycje znamy z dokładnością przybliżoną do wielkości atomu – 10^{-10}m. Jeżeli zostawimy go w spokoju bez dalszych pomiarów, jak długo dopóki niedokładność w pozycji stanie się rzędu 1cm?
   (a) A jeżeli mamy pojedynczy atom $m \sim 10^{-26}$kg?
2. Oblicz relację nieoznaczoności dla pozycji x i pędu p_y w kierunku y ortogonalnym do x.
3. Oblicz relację nieoznaczoności dla pozycji X i energii kinetycznej $T = P^2/2m$. Dlaczego ta relacja nie jest szeroko znana jak ta dla X i P?
4. Wykorzystaj relacje nieoznaczoności dla X i P dla oszacowania energii stanu podstawowego w pudełku o sztywnych scianach oddalonych o odległość L. Jak wynik się ma do dokładnej wartości energii $E_g = \hbar^2\pi^2/2mL^2$?
5. Wykorzystaj relacje nieoznaczoności dla X i P dla oszacowania energii i rozmiarów stanu podstawowego atomu wodoru, gdzie
$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{X}|}.$$
   Podpowiedź: Dla takiego szacowania rzędów wielkości można zazwyczaj przyjąć że $\langle f(Y) \rangle \approx f(\langle Y \rangle)$.
   (a) Jak wynik się ma do dokładnej wartości energii $E_g = -me^4/(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2$?
   (b) I do rozmiarów dokładnej funkcji falowej $\psi_g = \exp[-r/a_0]/\sqrt{\pi a_0^3}$ gdzie $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ jest promieniem Bohra?
6. Znajdź ogólną funkcję falowa $\psi(x)$ w wolnej przestrzeni (jednowymiarowej) o najmniejszej nieoznaczoności - znaczy takie $\psi(x)$ dla dla których relacja nieoznaczoności miedzy X i P sprowadza sie do równosci: $\Delta X \Delta P = \hbar/2$.