Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 6-01-2010 i 13-01-2010
Rozpraszanie II: w trzech wymiarach

Ćwiczenia

1. W przypadku rozpraszania cząstek o wektorze falowym k od nieruchomego osrodka w okólicy $r = 0$, funkcja falowa cząstek jest zazwyczaj przybliżana jako
$$u(r,\theta,\phi) \sim A\left[e^{ikz} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\right].$$
Podać argumenty za takim postawieniem problemu, oraz zinterpretować znaczenie poszczególnych elementów w powyższym wyrażeniu. Czemu można założyć zachowanie $1/r$ dla części sferycznej?

2. Jaki jest kątowy ("różniczkowy") przekrój czynny w powyższej postaci asymptotycznej funkcji falowej? Gęstość prądu prawdopodobieństwa dla funkcji falowej ψ jest $\vec{j}(x) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left[\psi^*(x)\vec{\nabla}\psi(x)\right]$, a $\vec{\nabla} = \hat{e}_r\nabla_r + (\hat{e}_\theta/r)\nabla_\theta + (\hat{e}_\phi/r\sin\theta)\nabla_\phi$. [Wynik: $d\sigma(\theta,\phi)/d\Omega = |f(\theta,\phi)|^2$]

3. W następnym etapie rozpracowania tej kwestii, rozwija się funkcję falową na "fale cząstkowe" o ustalonych momentach pędu l, według $u(r,\theta,\phi) = \sum_{=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$. Czemu to jest użyteczne?

4. Czemu w przypadku potencjału $V(r)$ zależnego jedynie od r można pominąć wyrazy o $m \neq 0$?

5. Dla cząstki swobodnej, opisanej falą płaską, funkcja falowa rozweinięta w harmoniki sferyczne wygląda jak
$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_j(kr)\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l0}(\cos\theta).$$
Używając asymptotyczne właściwości funkcji Bessela (patrz poniżej), pokazać jak to wygląda w limicie $r \to \infty$, ktory nas interesuje.

6. Teraz rozwijmy funkcję $f(\theta,\phi)$ w pdobnym szeregu $\sum_{l=0}^{\infty} a_l(k)\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l0}$ (z współczynnikami a_l do ustalenia). Biorąc pod uwagę że dla $r \to \infty$ potencjałznika, amplituda rozproszona funkcji falowej musi tutaj wyglądać podobnie, pozwalając ewentualnie na przesunięcia fazowe δ_l: $\sim \sin\left[kr - l\pi/2 + \delta_l\right]/r$. Fala zbiegająca $\sim e^{ikr}$ musi być dokładnie taka sama jak dla fali płaskiej (czemu?). Uzywając to założenie, wyznaczyć zależ ność współczynników $a_l(k)$ od k i $\delta_l(k)$.

7. Biorąc pod uwagę, więc, ortogonalność harmonik sferycznych $\int Y_{lm}Y_{l'm'}d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$, znaleźć zależność przekroju czynnego σ od przesunięć fazowych $\delta_l(k)$, oraz wyznaczyć kontrybucje fal cząstkowych l: $\sigma = \sum_l \sigma_l$. [Wynik: $\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l$.]

8. Mamy sztywną kulę o promieniu r_0. Znaleźć przesunięcia fazowe $\delta_l(k)$. Generalna forma funkcji falowej dla cząstki swobodnej o liczbie falowej k jest
$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)\right]Y_{l0}(\theta),$$
gdzie funkcje j_l i n_l są opisane poniżej.

9. Wyznaczyć kontrybucję σ_l fali cząstkowej $l = 0$ ("s") do przekróju czynnego dla wolnych cząstek ($k \to 0$).

10. Wyznaczyć tez tu względne kontrybucje fal cząstkowych $l > 0$.

Funkcje

Sferyczne funkcje Bessela i Neumanna
$$j_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho} \qquad j_1(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho^2} - \frac{\cos\rho}{\rho} \qquad n_0(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho} \qquad n_1(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho^2} - \frac{\sin\rho}{\rho}$$

Wyrażenia asymptotyczne
$$j_l(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(\rho - l\pi/2)}{\rho} \qquad n_l(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\cos(\rho - l\pi/2)}{\rho} \qquad j_l(\rho) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} \propto \rho^l \qquad n_l(\rho) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} \propto -\frac{1}{\rho^{l+1}}.$$

Harmoniki sferyczne
$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$
$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$