

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Emilii Witkowskiej
p.t. „Metoda pól klasycznych w opisie gazu bozonowego w równowadze termodynamicznej”**

Praca doktorska mgr Emilii Witkowskiej została wykonana w Instytucie Fizyki PAN pod kierunkiem doc. dr hab. Mariusza Gajdy i jest poświęcona teoretycznemu opisowi kondensatu Bosego-Einsteina za pomocą metody pól klasycznych, pozwalającej opisać kondensat w temperaturach $T > 0$. Obiektem badań mgr Witkowskiej jest jednorodny gaz atomowy w stanie równowagi znajdujący się w potencjale pudła. Wykonane w ramach metody pól klasycznych symulacje numeryczne porównane zostały z obliczeniami analitycznymi w przybliżeniu Bogoliubowa, co pozwoliło Autorce m.in. na wykrycie mechanizmów odpowiadających za dynamikę badanych funkcji korelacji. Z kolei analizując dynamikę relatywistycznego gazu bozonowego za pomocą metody pól klasycznych mgr Witkowska pokazała, że np. otrzymane widma wzbudzenia są zgodne z otrzymanymi przez innych autorów metodami całek po trajektoriach w granicy bardzo niskich temperatur, co stanowiło dla niej motywację do wyznaczenia innych fizycznych obserwabli jak np. ładunku i jego fluktuacji w stanie o najniższej energii w ramach metody pól klasycznych.

Porównanie i analizy wyników otrzymanych z jednej strony, poprzez numeryczne obliczenia w ramach modelu pól klasycznych z wynikami otrzymywanymi analitycznie w przybliżeniu Bogoliubowa stanowią metodę badawczą mgr Witkowskiej.

Recenzowana rozprawa liczy ogółem 86 stron. Rozpoczyna ją **Streszczenie**, w którym Autorka w skrócie zdefiniowała cel jej badań i analizowane sytuacje fizyczne, które omówię w dalszej części recenzji.

We **Wprowadzeniu** Autorka wyjaśnia pojęcia i metody, które stosuje w dalszej części rozprawy. Znajduje się w nim definicja kondensatu Bosego-Einsteina, przedstawiona jest metoda Bogoliubowa do opisu kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze $T = 0$ oraz metoda pól klasycznych, która jest rozwinięciem opisu w przypadku $T > 0$. W szczególności dużo uwagi poświęca dodatkowemu, zewnętrznemu parametrowi jaki pojawia się w opisie za pomocą pól klasycznych, a mianowicie parametrowi obciążenia, który decyduje które mody są uwzględniane. Ponieważ parametr obciążenia jest jednym z wykorzystywanych w symulacjach numerycznych wykonanych w ramach tej pracy i zależą od niego istotne parametry fizyczne układu takie jak temperatura i liczba cząstek, jego fizycznej interpretacji poświęcony jest też następny rozdział tezy.

Uważam, że dobór zagadnień we Wprowadzeniu jak i stopień szczegółowości omówienia poszczególnych elementów jest przemyślany i stanowi dobre wprowadzenie do dalszej części rozprawy.

W rozdziale **Kwantowanie drgań nieliniowej struny** mgr Witkowska zajmuje się fizyczną interpretacją parametru obciążenia występującego w metodzie pól klasycznych, który jak pokazuje jest nie tylko koniecznością wynikającą z implementacji metody pól klasycznych, ale wprowadza do niej stałą Plancka. Tym samym usuwa pozorną sprzeczność jakiej można by się dopatrywać w opisie czysto kwantowego efektu, jakim jest kondensacja za pomocą klasycznych pól.

W tym celu analizuje czysto klasyczny układ - pole wychyleń oscylatorów oddziałujących wzajemnie nieliniową, lokalną siłą - modelem jest jednowymiarowa elastyczna struna z periodycznymi warunkami brzegowymi i nieliniowym lokalnym oddziaływaniem. Układ taki w wyniku nieliniowej ewolucji osiąga stan równowagi, charakteryzowany przez ekwipartycję energii, co może być wykorzystane do definicji temperatury układu. Z kolei korzystając z analogii otrzymanego wyrażenia na energię układu do wyrażenia na energię zbioru oscylatorów wprowadza stałą o wymiarze działania, która pozwala zapisać energię w postaci sumy elementarnych wzbudzeń, kwantując w ten sposób układ. Przez porównanie otrzymanego rozkładu gęstości energii z rozkładem Plancka wprowadza stałą Plancka do opisu klasycznego oraz otrzymuje przepis na wyznaczenie parametru obciążenia, który występuje w modelu klasycznym. Przedstawione w tym rozdziale oryginalne rozumowanie jest bardzo eleganckim sposobem wprowadzenia parametru obciążenia, pokazującym jego sens fizyczny. Pytanie jakie może się nasuwać to czy fakt, że układ osiąga stan równowagi zależy od rodzaju zapostulowanej postaci lokalnej nieliniowości (trochę do tego nawiązuje uwaga Autorki na str. 14, ale nie do końca daje odpowiedź).

W rozdziale **Dynamika fazy kondensatu Bosego-Einsteina** mgr Witkowska zastosowała metodę pól klasycznych do wyznaczenia dynamiki fazy kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze różnej od zera. Przedmiotem badań były dwuczaskowe funkcje korelacji w funkcji temperatury, które są bardzo ważnymi charakterystykami układu, gdyż są miarą spójności układu. Spójność jest tą cechą, która odróżnia kondensat Bosego-Einsteina od termicznego gazu atomów i mierzy zdolność układu do interferencji.

Autorka zbadała dwupunktową funkcję korelacji amplitudy kondensatu, liczby atomów w kondensacie oraz wyznaczyła wariancję fazy kondensatu. Obliczenia numeryczne przeprowadziła przy wykorzystaniu metody pól klasycznych dla różnych temperatur układu. Jednym z ważniejszych wyników jest pokazanie, że wariancja fazy kondensatu rośnie kwadratowo z czasem (rys. 3.3). Jest to nowy i oryginalny wynik, gdyż wcześniejsze prace teoretyczne pokazywały bądź liniową zależność bądź też dawały błędny współczynnik proporcjonalności.

Następnie dane otrzymane z tak przeprowadzonych symulacji numerycznych traktuje jako punkt odniesienia i porównań z wynikami obliczeń, również wykonanych przez Autorkę, w ramach trzech przybliżonych modeli analitycznych: i) przybliżenia Bogolubowa, ii) przybliżenia Bogolubowa z uwzględnieniem skończonego czasu życia wzbudzeń elementarnych, iii) w ramach modelu ergodycznego. Okazało się, że korelacja liczby atomów w kondensacie jest bardzo czułym testem tych przybliżeń. O ile model Bogoliubowa odtwarzał numerycznie jedynie oscylacje funkcji korelacji dla bardzo krótkich czasów (rys. 3.4), to uwzględnienie skończonego czasu życia wzbudzeń daje też poprawny zanik korelacji liczby atomów w kondensacie, nadal jednak tylko dla krótkich

czasów (rys. 3.6). Dla czasów długich oba modele dają wynik niezgodny z symulacjami numerycznymi – zgodność długoczasową (rys. 3.7) otrzymuje Autorka w ramach przybliżenia opartego na hipotezie ergodycznej, która m.in. nakłada dodatkowe więzy powodujące, że amplitudy różnych modów własnych nie są niezależne.

We Wprowadzeniu (na str. 8/9) mgr Witkowska wspomina o przybliżeniu Bogoliubowa-Popowa pozwalającym na wyznaczenie widma wzbudzeń kondensatu w skończonej temperaturze – czy takie uwzględnienie poprawek temperaturowych również dałoby (poprawiło) zgodność z obliczeniami numerycznymi. Nie jest też dla mnie jasne dlaczego w tym rozdziale (na str. 26 – wzór 3.9) Autorka przyjmuje inną wartość parametru obciążenia niż wyznaczona w poprzednim rozdziale rozprawy (na str. 21).

W rozdziale **Naładowane nieliniowe pole Kleina-Gordona** mgr Witkowska zbadła możliwość zastosowania metody pól klasycznych do opisu relatywistycznego pola bozonowego w niskich temperaturach. Rozważała model słabo oddziałującego masywnego pola bozonowego, zakładając, że energia oddziaływania jest proporcjonalna do iloczynu czterech operatorów pola, co jest jednym ze znanych z literatury modeli. Pole opisane jest równaniem Kleina-Gordona z dodatkowym wyrazem nieliniowym.

Celem tej części pracy było sprawdzenie, czy idea, iż silne pola bozonowe można z powodzeniem opisywać za pomocą klasycznej zespolonej funkcji, okaże się słuszna także w przypadku, gdy dynamika pola nie jest rządona równaniem typu równania Schrödingera. Autorka ograniczyła swoje badania do sytuacji, w której całkowity ładunek układu jest dodatni, czyli gdy cząstki dominują nad antycząstkami. Najpierw znalazła mody własne i energie wzbudzeń pola w przybliżeniu Bogolubowa, które można stosować w temperaturze równej zero. Następnie zastosowała metodę pól klasycznych, która pozwala na opis układu w szerokim przedziale temperatur, aż do temperatury, w której amplituda modu o pędzie zero znika.

Wykonując numeryczne symulacje mgr Witkowska pokazała, że oddziaływania prowadzą do stanu równowagi termodynamicznej, w którym obsadzenia modów fluktuują wokół wartości średnich. Następnie wyznaczyła częstości własne wzbudzeń pola badając czasową zależność modów własnych. Wyznaczając amplitudy tych modów była również w stanie określić liczbę cząstek oraz antycząstek w każdym ze stanów o określonym pędzie. Autorka pokazała, że w układzie tym spełniona jest zasada ekwipartycji, co pozwala na wyznaczenie temperatury. Obliczenia numeryczne pokazują, że jedynie cząstki podlegają kondensacji Bosego-Einsteina, natomiast antycząstki, których jest znacznie mniej, nie kondensują. Na koniec mgr Witkowska wyznaczyła ładunek zgromadzony w kondensacie w funkcji temperatury oraz fluktuacje tego ładunku oraz wyznaczyła charakterystyczną temperaturę kondensacji.

Podsumowując; mgr Witkowska przedstawiła bardzo obszerny i wnikliwie przeanalizowany materiał, w którym wykorzystwała informacje otrzymane z własnych obliczeń, przeprowadzonymi różnymi metodami, jak i dostępnej literaturowej wiedzy. Ponieważ wyniki w znacznej części omówiłem już wyżej, tutaj jedynie posumuję, moim zdaniem najważniejsze:

- nadanie fizycznej interpretacji parametrowi obciążenia występującemu w metodzie pól klasycznych i pokazanie jak uzgodnienie rozkładu gęstości energii z rozkładem kwantowym wprowadza do klasycznego modelu stałą Plancka;
- wykazanie, że metoda pól klasycznych uwzględnia automatycznie zarówno skończony czas życia kwazicząstek jak również korelacje między amplitudami różnych modów wynikające z zachowania energii, co jest ważne dla poprawnego wyznaczenia fluktuacji fazy kondensatu. Ten wynik ma ważne znaczenie dla badań eksperymentalnych, gdyż pokazuje czasową skalę spójności układu, co jest jedną z podstawowych własności kondensatu;
- pokazanie, że metoda pól klasycznych może być z powodzeniem stosowana w relatywistycznej teorii pola. Prezentowane badania wspierają tezę, że makroskopowo obsadzone pola bozonowe można opisywać za pomocą pola klasycznego, gdyż w niskich temperaturach dominującą rolę pełni falowy aspekt pola.

Bardzo podoba mi się spójność i logiczna ciągłość badań przedstawionych w rozprawie polegającą; najpierw na nadaniu fizycznej interpretacji parametrom występującym w metodzie pól klasycznych, następnie na zbadaniu za pomocą tej metody wybranych układów fizycznych i porównaniu wyników z obliczonymi w ramach innych przybliżeń.

Zapewne wyniki tak systematycznych badań są źródłem dla nowych pomysłów badawczych i trochę żałuję, że Autorka nie nakreśliła ich w rozdziale podsumowującym pracę. Ciekaw jestem czy te perspektywy to np. policzenie metodą pól klasycznych dynamiki kondensatu w pułapce harmoniczej w $T > 0$ – a więc w warunkach, w których występuje on w laboratoriach. Czy model relatywistycznego gazu bozonowego rozważanego w Rozdziale 4 odpowiada realistycznemu układowi fizycznemu?

Te uwagi oczywiście nie wpływają na moją bardzo wysoką ocenę rezultatów przedstawionych w rozprawie doktorskiej mgr Emilii Witkowskiej oraz formę ich prezentacji. Tekst rozprawy jest napisany jasno i przejrzysto - nie zauważyłem większych usterek redakcyjnych.

Wyniki Autorki zostały opublikowane w 2 artykułach (w J. Phys. B i Phys. Rev. A) oraz są podstawą 1 artykułu przygotowanego do publikacji. Jest ona też współautorką 2 innych publikacji z dziedziny (obie w Phys. Rev. A).

Podsumowując stwierdzam, że przedstawiona rozprawa spełnia bez zastrzeżeń warunki stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr Emilii Witkowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.