

Słowa kluczowe:

rozpraszanie światła na kulce,

teoria Mie,

Teoria Rayleigha,

całkowite przekroje czynne na absorpcję, ekstynkcję i rozpraszanie, polaryzacja światła

roproszzonego, rozkłady kątowe światła rozproszzonego na kulce.

Rozdział 3**Rozpraszanie światła na pojedynczej cząstce****3.1. Rozpraszanie światła**

Rozpraszanie światła w ośrodkach materialnych, jego przejawy i skutki stanowią szerokie pole badań. U podstaw rozpraszania leży oddziaływanie ładunków elektrycznych (swobodnych bądź związanych) z falą elektromagnetyczną, wskutek czego wprowadzane są one w ruch oscylacyjny. Przyspieszane ładunki promieniują w różnych kierunkach: natężenie światła padające z danego kierunku podlega kierunkowej redystrybucji. Rozpraszanie, podobnie jak absorpcja, sprawia więc, że natężenie wiązki światła rozchodzącej się w ośrodku w danym kierunku maleje wraz z przebytą drogą.

Wielce zróżnicowane w swej naturze zjawiska rozproszeniowe można podzielić według różnych kryteriów. Może nim być rodzaj ośrodka rozpraszającego, scharakteryzowany przez koncentrację, kształt, rozmiary, strukturę (jednorodną bądź niejednorodną) i skład chemiczny centrów rozpraszających. Innym z kryteriów może być to, czy fala rozproszona zmieniła swoją długość w stosunku do fali padającej (rozpraszanie nieelastyczne, np. rozpraszanie ramanowskie), czy też nie (rozpraszanie elastyczne). Użycie

światła laserów o dobrze określonej długości fali sprawia, że techniki badania procesów rozproszeniowych zyskały nową jakość w stosunku do badań z konwencjonalnymi źródłami światła.

Rozpraszanie promieniowania elektromagnetycznego na pojedynczym obiekcie jest zagadnieniem elementarnym, którego zrozumienie i opis umożliwia rozwiązanie wielu problemów związanych z rozpraszaniem światła w ośrodkach składających się z wielu cząstek: centrów rozpraszających, w tym zjawisk zachodzących w atmosferze ziemskiej. W grupie tej chyba najbardziej podstawowym problemem jest rozpraszanie światła na obiekcie kulistym bądź zbliżonym do kulki, o dowolnych własnościach materiałowych i rozmiarze. Pomimo że formalne rozwiązanie tego problemu znane jest prawie od początku ubiegłego wieku, jego praktyczne zastosowanie stało się możliwe dopiero dzięki użyciu komputerów.

Jak wcześniej wspomniano, własności materiałowe (chemiczne) cząstki sferycznej (np. kropli czy klastra) w klasycznej teorii rozproszeniowej opisane są współczynnikiem załamania (na ogół zespolonym), który może uwzględniać dyspersję czasową oraz dyspersję przestrzenną. Dyspersja (czasowa), czyli zależność współczynnika załamania od częstotliwości ω fali elektromagnetycznej, jest zjawiskiem dobrze znanym i opisanym w wielu podręcznikach optyki. Genezą dyspersji czasowej jest opóźnienie pomiędzy czasem t , w którym pole elektryczne \mathbf{E} oddziałuje z ośrodkiem, i czasem t' , w którym w ośrodku pojawia się indukcja elektryczna \mathbf{D} (polaryzacja lub/i prąd w ośrodku).

Istnieją też procesy wymagające uwzględnienia nie tylko wpływu częstości na własności optyczne ośrodka, ale również wektora \mathbf{k} fali elektromagnetycznej oddziałującej z ośrodkiem, czyli uwzględnienia dyspersji przestrzennej [1]. Oznacza to zależność funkcji dielektrycznej ośrodka również od wektora falowego \mathbf{k} : $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$. Istnienie w ośrodku dyspersji przestrzennej przejawia się tym, że indukcja \mathbf{D} w punkcie \mathbf{r} zależy od pola elektrycznego \mathbf{E} w punkcie \mathbf{r}' innym niż \mathbf{r} . Zjawiska związane z zależnością funkcji dielektrycznej od wektora falowego stanowią klasę zjawisk nielokalnych. Należą do nich np. anomalny efekt naskórkowy i wzbudzenie plazmonów w cienkich warstwach, np. [1, 2].

Dyspersja przestrzenna w ośrodkach jest na ogół znacznie mniej znacząca niż dyspersja czasowa. W wielu przypadkach można więc używać z powodzeniem lokalnej funkcji dielektrycznej $\epsilon(\omega)$, jak to ma miejsce w większości podręczników optyki. Jednak wszędzie tam, gdzie obszar zmienności pola elektromagnetycznego jest znaczny w porównaniu z drogą swobodną elektronów oddziałujących z falą elektromagnetyczną, efekty nielocalne mogą być bardzo istotne. Jednym ze źródeł nielokalności może być np. skończony rozmiar próbki poddanej oddziaływaniu z polem elektromagnetycznym. Efekty nielocalne są

w szczególności znaczące na powierzchniach metalowych, prowadząc do powstania szybkozmiennych pól podłużnych przy powierzchni i istotnego zaburzenia gęstości swobodnego ładunku powierzchniowego (plazmony) [1–3].

Gdy ośrodek jest niejednorodny, rozpraszanie światła opisać można za pomocą efektywnej funkcji dielektrycznej, o ile rozmiary drobin są dużo mniejsze od długości fali. W teoriach bazujących na modelu ośrodka efektywnego definiuje się tak funkcję dielektryczną ϵ_{ef} ośrodka [4], by badana wielkość fizyczna dla ośrodka niejednorodnego i hipotetycznego ośrodka efektywnego opisywanego przez funkcję ϵ_{ef} były takie same.

3.2. Opis rozpraszania fali elektromagnetycznej na cząstce kulistej o dowolnym rozmiarze (teoria Miego)

Pierwszym ogólnym sformułowaniem opisu elastycznego rozpraszania płaskiej fali elektromagnetycznej na kulce z dowolnego materiału o dowolnym rozmiarze jest praca Gustawa Miego [5]. Obszerne wyprowadzenia Miego zostały w istotny sposób zredukowane przez Borna [6], a następnie w części przeformułowane przez Strattona [7] oraz Bohrena i Huffmana [8]. Opracowania te są obecnie znacznie częściej wykorzystywane w zastosowaniach niż oryginalna praca Miego. Opis rozpraszania światła na cząstce sferycznej jest znacznie bardziej złożony od strony rachunkowej niż rozpraszania na płaszczyźnie. Praktycznie użytecznymi wielkościami są całkowity przekrój na rozpraszanie i absorpcję, intensywność rozpraszania pod danym kątem albo funkcyjne zależności tych wielkości od promienia i współczynnika załamania obiektu rozpraszającego czy kątów rozpraszania. Kulistość obiektu rozpraszającego narzuca wybór współrzędnych sferycznych (r, θ, φ). Z drugiej zaś strony konieczność przedstawienia płaskiej fali padającej w tych współrzędnych czyni formalizm niesympatycznym już na jego wstępnym etapie. Inną trudność stanowi fakt, że różni autorzy stosują różne konwencje w definiowaniu współczynników rozwinięcia Miego. Problemy wynikają też z różnic w konwencjach dotyczących stosowanej teorii materiałowej dla ośrodków dyspersyjnych opisywanych przez zespolone współczynniki załamania. Opracowanie niniejsze ma za cel przedstawienie idei teorii rozpraszania Miego z pominięciem żmudnych kroków wstępnych, polegających między innymi na rozpisywaniu poszczególnych fal w bazie harmonik sferycznych. Pominięte fragmenty znaleźć można w literaturze, np. [6, 8] lub [10]. Podane w niniejszej monografii *explicite* wyrażenia końcowe

zawierają komplet niezbędnych definicji umożliwiających ich praktyczne użycie w badaniach parowania kropli wody w eksperymencie przeprowadzonym w IF PAN (opisanym w p. 8.1), jak również stanowić mogą dogodny punkt wyjścia dla badań innych zagadnień związanych z rozpraszaniem na sferycznych cząstkach o dowolnym rozmiarze, w tym własności rozpraszających aerozoli czy kropelek chmur (równanie "lidarowe", p. 7.2.2.1 i 7.2.2.5).

Teoria Miego jest opisem w języku elektrodynamiki klasycznej elastycznego (bez zmiany częstości) oddziaływania fali elektromagnetycznej z obiektem kulistym o ostrych brzegach, dowolnym rozmiarze i dowolnych własnościach materiałowych określanych współczynnikiem załamania. Parametrami zewnętrznymi tej teorii są promień kulki R oraz zespolony współczynnik załamania (lub skalarna funkcja dielektryczna) kulki i jej otoczenia. Teoria Miego jest teorią lokalną; oba ośrodki są jednorodne w przyjętej skali długości fali, a więc nie zmieniają swych własności przestrzennych. Skok ich własności dielektrycznych ma miejsce na infinitezymalnie wąskiej granicy między ośrodkami. Zazwyczaj przyjmuje się, że własności dielektryczne kulki nie zależą od jej promienia i są takie same, jak własności rozciągłej materii, która buduje kulkę. Funkcja dielektryczna lub współczynnik załamania opisujący te własności pochodzi z teorii materiałowej bądź z doświadczenia. Związek między funkcją dielektryczną i współczynnikiem załamania jest następujący:

$$n(\omega) = \operatorname{Re} n(\omega) + i \operatorname{Im} n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (3.1)$$

Przy znanej dyspersji ośrodków (zależność funkcyjna współczynnika załamania od częstotliwości ω lub długości fali λ) teoria Miego uwzględnia zależność rozpraszania od długości fali padającej na kulkę. Jak już wspomniano, długość fali λ odniesiona do promienia kulki R jest parametrem teorii Miego; należy jednak pamiętać, że zmiany tego parametru, o ile wiążą się ze zmianą długości fali rozpraszanej na kulce, oznaczają również konieczność stosownej modyfikacji współczynnika załamania. Fakt ten jest zadziwiająco często pomijany w wielu opracowaniach.

Z zespolonym współczynnikiem załamania mamy do czynienia wtedy, gdy w ośrodku istnieje absorpcja. W odniesieniu do funkcji dielektrycznej może to oznaczać, iż jest ona również zespolona. W ten sposób np. w oscylatorowej teorii materiałowej Lorentza uwzględnia się tłumienie oscylacji. Ale nawet gdy funkcja dielektryczna jest funkcją rzeczywistą, współczynnik załamania może być zespolony, jeśli w interesującym nas przedziale częstości funkcja dielektryczna jest ujemna. W grupie najprostszych modeli materiałowych jest to np. dielektryczna funkcja Drudego gazu elektronów swobodnych;

absorpcję związać można wówczas z ciepłem Joule'a wydzielanym w trakcie przepływu prądu.

Punktem wyjścia dla teorii Miego są równania Maxwella z warunkiem brzegowym na powierzchni kuli. Samozgodne równania Maxwella (brak pól zewnętrznych względem ładunków) pozwalają poszukiwać parametrów charakteryzujących kulkę o danych własnościach dielektrycznych (np. [1, 11–13]). Jeśli istnieją rozwiązania harmoniczne równań Maxwella, warunki na ich istnienie wyznaczają częstości własne kulki oraz prędkości tłumienia tych częstości, stanowiąc istotne narzędzie analizy własności rozpraszających.

W rozproszeniowej teorii Miego punktem wyjścia są równania Maxwella z warunkami brzegowymi uwzględniającymi pole elektromagnetyczne fali płaskiej padające na cząstkę w kształcie kulki, pole na niej rozproszone (na zewnątrz kulki) oraz pole załamane w jej wnętrzu. Polami poszukiwanymi są pole fali rozproszonej w ośrodku otaczającym kulkę oraz pole fali wewnątrz kulki przy płaskiej fali padającej. Zagadnienie jest wtedy analogiczne do problemu rozproszenia na płaskiej powierzchni opisanego równaniami Fresnela, w którym mając falę padającą, poszukuje się fali odbitej i ugiętej. Teoria rozpraszania Miego pozwala opisać wielkości mierzalne takie, jak całkowity przekrój na rozpraszanie i absorpcję w kulce o zadanym promieniu czy intensywność rozpraszania pod danym kątem. Pozwala również obliczyć przewidywane zależności tych wielkości od promienia i długości fali oraz rozkłady kątowe wielkości natężenia światła rozpraszanego. Używając formalizmu teorii Miego, możliwe jest również uwzględnienie rozrzutu promieni sferycznych obiektów rozpraszających (np. [13], rozdz. 2).

Pole elektromagnetyczne \mathbf{E}_{out} i \mathbf{H}_{out} w otaczającej cząstkę nieprzewodzącej i niemagnetycznej przestrzeni jest superpozycją pola padającego \mathbf{E}_i i \mathbf{H}_i i pola rozproszonego \mathbf{E}_s oraz \mathbf{H}_s :

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H}_{\text{out}} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s. \quad (3.2)$$

Przy braku zewnętrznych ładunków i prądów poszukiwane pola harmoniczne wewnątrz: $\mathbf{E}_{\text{in}}(r, \omega) = \mathbf{E}_{\text{in}}(\omega)e^{-i\omega t}$, i na zewnątrz kuleczki: $\mathbf{E}_{\text{out}}(r, \omega) = \mathbf{E}_{\text{out}}(\omega)e^{-i\omega t}$, spełniają następujące czasowo niezależne równania Maxwella [8]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad (3.6)$$

zapisane odpowiednio dla kulki i dla ośrodka ją otaczającego. Symbolem μ oznaczono przenikalność magnetyczną ośrodków. Ponieważ poszukujemy rozwiązań równań Maxwella (3.3) i (3.4) w postaci harmoniczných fal poprzecznych, pola \mathbf{E} i \mathbf{H} wewnątrz i na zewnątrz kulki spełniają wektorowe równania falowe wynikające z równań (3.5) i (3.6) po uwzględnieniu poprzeczności pól:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (3.7)$$

gdzie $k(\omega) = (\omega/c)\text{Re}n(\omega) + i(\omega/c)\text{Im}n(\omega) = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ jest zespoloną liczbą falową fali świetlnej, równą k_{in} wewnątrz kulki ($\varepsilon = \varepsilon_{\text{in}}$) oraz k_{out} w ośrodku ją otaczającym ($\varepsilon = \varepsilon_{\text{out}}$). Część rzeczywista k definiuje długość fali w ośrodku $\lambda/\text{Re}n(\omega)$: $\text{Re}k = (2\pi/\lambda)\text{Re}n(\omega)$ (λ jest długością fali w próżni), zaś część urojona k definiuje współczynnik κ , z którym fala jest absorbowana: $\kappa = (\omega/c)\text{Im}n(\omega)$.

Równania wektorowe (3.7), wraz z warunkami brzegowymi, które muszą spełniać składowe styczne pól na sferycznej granicy ośrodków, są bazowym zestawem równań dla rozważanego problemu. Odpowiada im skalarnie równanie falowe $\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0$, którego rozwiązanie we współrzędnych sferycznych jest dobrze znane. Można je przedstawić w postaci sfaktoryzowanej: $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, np. [6–8], przy czym każda z funkcji zmiennych r , θ , φ spełnia stosowne równanie różniczkowe ze stałymi całkowania określonymi przez warunki jednoznaczności poszukiwanych rozwiązań. Funkcjami generującymi rozwiązania są funkcje $\sin\varphi P_l^{(1)}(\cos\theta)z_l(x)$ i $\cos\varphi P_l^{(1)}(\cos\theta)z_l(x)$, gdzie $P_l^{(1)}(\cos\theta)$ jest wielomianem Legendre'a (wzory (3.16)–(3.18)), $z_l(x)$ zaś jest sferyczną funkcją Bessla pierwszego rodzaju rzędu l wewnątrz kulki: $z_l(x) = j_l(k_{\text{in}}r)$, albo sferyczną funkcją Hankla pierwszego rodzaju na zewnątrz kulki: $z_l(x) = h_l^{(1)}(k_{\text{out}}r)$. Ponieważ w różnych opracowaniach przyjmuje się różną notację, przypomnijmy, że

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z), \quad h_l^{(1)}(z) = j_l(z) - in_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+1/2}^{(1)}(z),$$

gdzie $n_l(z) = \sqrt{\pi/2z} N_{l+1/2}(z)$; funkcje $J_{l+1/2}(z)$ i $H_{l+1/2}^{(1)}(z)$ oraz $N_{l+1/2}(z)$ są odpowiednio standardowymi funkcjami cylindrycznymi Bessla, Hankla i Neumanna rzędu połówkowego, zgodnie z konwencją użytą w [6].

Z rozwiązania skalarnego Ψ_l skonstruować można dwa niezależne rozwiązania równań wektorowych (3.7): jedno ze znikającą składową radialną pola magnetycznego (fala elektryczna), drugie ze znikającą składową radialną pola elektrycznego (fala magnetyczna). Z

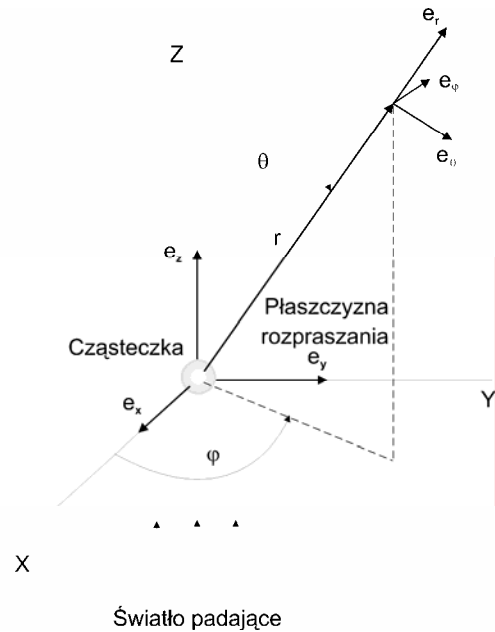
symetrii sferycznej cząstki rozpraszającej wynika, że rozwiązania równań wektorowych (3.7) można wyrazić w postaci sumy wektorów harmonik sferycznych M_l i N_l zdefiniowanych w następujący sposób:

$$M_l = \nabla \times (r \Psi_l), \quad kN_l = \nabla \times M_l. \quad (3.8)$$

Spełniają one wszystkie warunki nakładane na poszukiwane pola elektromagnetyczne: wektorowe równanie falowe, znikanie ich dywergencji, proporcjonalność $\nabla \times M_l$ do N_l oraz proporcjonalność $\nabla \times N_l$ do M_l . W bazie wektorów sferycznych harmonik możemy teraz wyrazić pole elektryczne i magnetyczne fali padającej. Warunki ciągłości składowych stycznych pól elektrycznego E i magnetycznego H do powierzchni cząstki:

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{in}) \times \mathbf{e}_r = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{in}) \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

dla $r = R$, oraz ortogonalność wektorów harmonik przy danym polu padającym określają formę rozwinięcia pola rozproszonego oraz pola wewnątrz kulki.



Rys. 3.1. Podstawowe (ortogonalne) geometrie polaryzacyjne dla analizy stanu polaryzacji światła rozproszonego na kulce

W układzie współrzędnych, w którym środek kulki znajduje się w początku układu (rys. 3.1), oś z wybrana jest zgodnie z kierunkiem propagacji fali padającej, oś x zaś zgodnie z kierunkiem polaryzacji (kierunkiem drgań pola elektrycznego E wiązki padającej), wyrażenia na poszczególne składowe wektorów E_s i H_s pól rozproszonych na kulce w każdym punkcie przestrzeni są następujące:

$$E_r^{(s)}(\theta, \varphi, r) = \frac{\cos \varphi}{k_{out}^2 r^2} E_0 \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) {}^e B_l \xi_l(k_{out} r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \quad (3.10)$$

$$E_{\theta}^{(s)}(\theta, \varphi, r) = -\frac{\cos \varphi}{k_{\text{out}} r} E_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left({}^e B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta - i {}^m B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) \frac{P_l^{(1)'}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right), \quad (3.11)$$

$$E_{\varphi}^{(s)}(\theta, \varphi, r) = -\frac{\sin \varphi}{k_{\text{out}} r} E_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left({}^e B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) \frac{P_l^{(1)'}(\cos \theta)}{\sin \theta} - i {}^m B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right), \quad (3.12)$$

$$H_r^{(s)}(\theta, \varphi, r) = \frac{k}{\omega \mu k_{\text{out}}^2 r^2} H_0 \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) {}^m B_l \xi_l(k_{\text{out}} r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \quad (3.13)$$

$$H_{\theta}^{(s)}(\theta, \varphi, r) = -\frac{k}{\omega \mu k_{\text{out}} r} H_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left({}^e B_l \xi_l(k_{\text{out}} r) \frac{P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} + i {}^m B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta \right), \quad (3.14)$$

$$H_{\varphi}^{(s)}(\theta, \varphi, r) = \frac{k}{\omega \mu k_{\text{out}} r} H_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left({}^e B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) P_l^{(1)'}(\cos \theta) \sin \theta + i {}^m B_l \xi_l'(k_{\text{out}} r) \frac{P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right). \quad (3.15)$$

Znak „prim” oznacza różniczkowanie funkcji względem jej argumentu, $k_{\text{out}} = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}}$,

$P_l^{(1)}(z)$ jest wielomianem Legendre'a pierwszego rodzaju rzędu l :

$$P_l^{(1)}(\cos \theta) = \frac{l}{\sin \theta} (P_{l-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_l(\cos \theta)), \quad (3.16)$$

gdzie

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{l/2} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!} (\cos \theta)^{l-2m}, \quad (3.17)$$

zaś $P_l^{(1)'}(z)$ jest pochodną po argumentu [6]:

$$\frac{dP_l^{(1)}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} = \frac{(l+1)P_{l-1}^{(1)}(\cos \theta) - l \cos \theta P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta}. \quad (3.18)$$

${}^e B_l$ i ${}^m B_l$ są zespolonymi współczynnikami rozkładu (w konwencji stosowanej w [6]), które wyrażają się przez analogiczne zespolone współczynniki rozkładu a_l oraz b_l (w konwencji użytej w [8]) następująco:

$${}^e B_l = i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} a_l, \quad (3.19)$$

$${}^m B_l = i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} b_l. \quad (3.20)$$

Przy ustalonej częstotliwości ω fali padającej współczynniki a_l oraz b_l są funkcjami promienia R kulki:

$$a_l = \frac{m^2 j_l(mx) (x j_l(x))' - (m x j_l(mx))' j_l(x)}{m^2 j_l(mx) (x h_l^{(1)}(x))' - (m x j_l(mx))' h_l^{(1)}(x)}, \quad (3.21)$$

$$b_l = \frac{j_l(mx)(xj_l(x))' - (mxj_l(mx))' j_l(x)}{j_l(mx)(xh_l^{(1)}(x))' - mxj_l(mx)' h_l^{(1)}(x)}, \quad (3.22)$$

gdzie

$$x = \frac{2\pi R}{\lambda} n_{\text{out}} = k_{\text{out}} R, \quad (3.23)$$

λ jest długością fali w próżni o częstotliwości ω , m – względnym współczynnikiem załamania ($m = n_{\text{in}}/n_{\text{out}} = k_{\text{in}}/k_{\text{out}}$, n_{in} – współczynnik załamania cząstki, n_{out} – współczynnik załamania ośrodka otaczającego). Wprowadzając funkcje Riccatiego–Bessla $\psi_l(z)$, $\xi_l(z)$ i $\chi_l(z)$ w miejsce sferycznych funkcji Bessla i Hankla:

$$\psi_l(z) = xj_l(z), \quad \xi_l(z) = xh_l^{(1)}(z) = \psi_l(z) - i\chi_l(z), \quad (3.24)$$

współczynniki rozkładu a_l i b_l można zapisać w postaci:

$$a_l = -\frac{m\psi_l(mx)\psi_l'(x) - \psi_l(x)\psi_l'(mx)}{m\psi_l(mx)\xi_l'(x) - \xi_l(x)\psi_l'(mx)}, \quad (3.25)$$

$$b_l = -\frac{\psi_l(mx)\psi_l'(x) - m\psi_l(x)\psi_l'(mx)}{\psi_l(mx)\xi_l'(x) - m\xi_l(x)\psi_l'(mx)}, \quad (3.26)$$

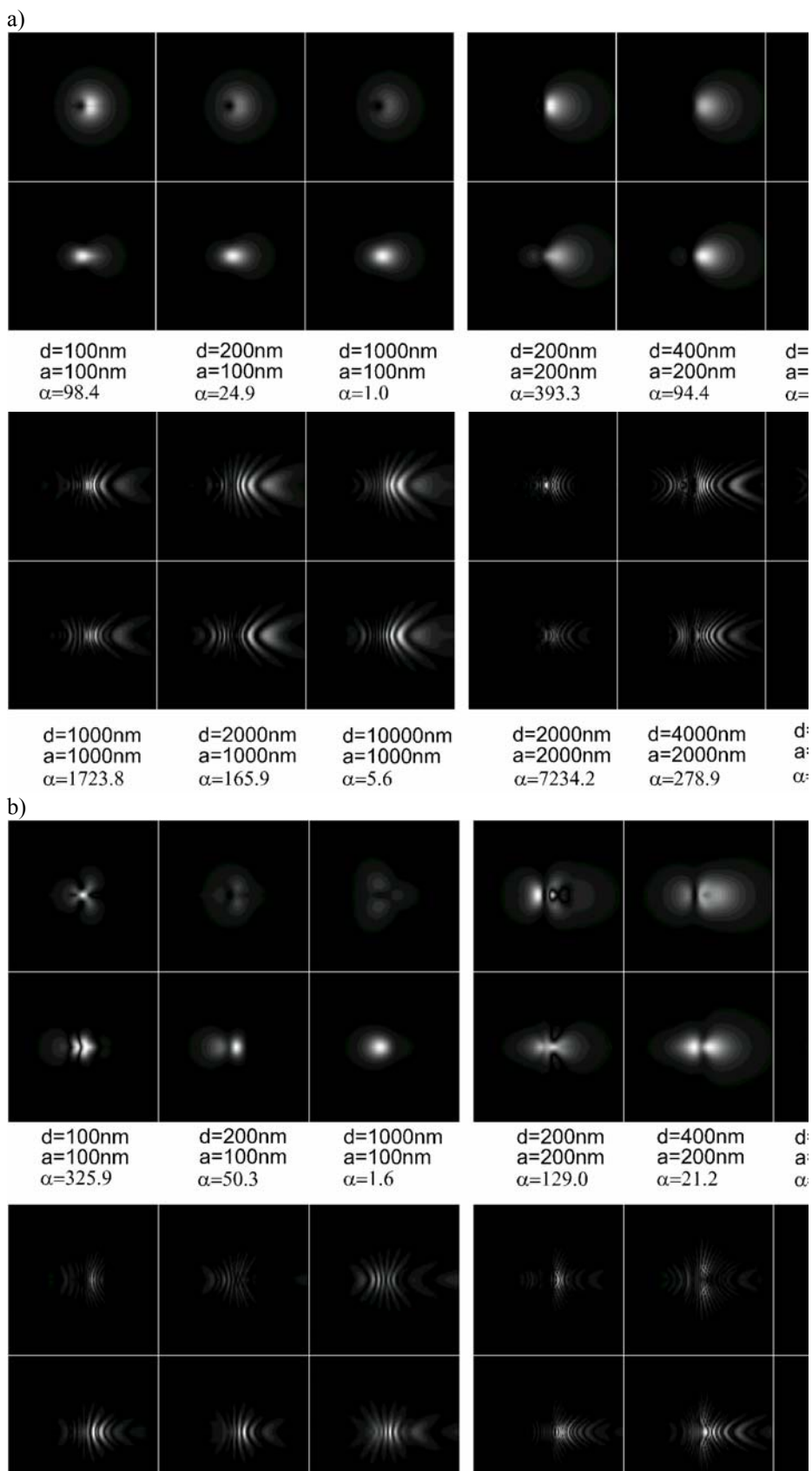
lub

$$a_l = -\frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}) - \sqrt{\varepsilon_{\text{out}}}\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}})}{\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}\xi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}) - \sqrt{\varepsilon_{\text{out}}}\xi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}})}, \quad (3.27)$$

$$b_l = -\frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}) - \sqrt{\varepsilon_{\text{out}}}\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})}{\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}\xi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}}) - \sqrt{\varepsilon_{\text{out}}}\xi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{out}}})\psi_l(\rho\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}})}, \quad (3.28)$$

gdzie $\rho = 2\pi R/\lambda$ jest parametrem określającym rozmiary kulki względem długości fali padającej odniesionej do próżni.

Wyrażenia (3.10)–(3.15) określające poszczególne składowe wektora elektrycznego $\mathbf{E}_s = (E_r^{(s)}, E_\theta^{(s)}, E_\phi^{(s)})$ i magnetycznego $\mathbf{H}_s = (H_r^{(s)}, H_\theta^{(s)}, H_\phi^{(s)})$ fali rozproszonej zawierają odmienną zależność od odległości od środka cząstki r : składowe $E_r^{(s)}$ i $H_r^{(s)}$ zanikają proporcjonalnie do r^{-2} , podczas gdy składowe $E_\theta^{(s)}$, $E_\phi^{(s)}$, $H_\theta^{(s)}$, $H_\phi^{(s)}$ zanikają proporcjonalnie do r^{-1} . Z dala od początku współrzędnych, czyli w polu dalekim, rozproszone światło staje się falą poprzeczną i składowe radialne pola elektrycznego i magnetycznego można zaniedbać.



Rys. 3.2. Seria obrazów (interferogramów) sferycznej kropli wody (a) i kulki krzemu (b) o kilku różnych promieniach a w różnych odległościach d od płaszczyzny obrazowania; α jest parametrem wzmocnienia korygującym względną jasność poszczególnych obrazów. Obrazy otrzymane dla polaryzacji równoległej do płaszczyzny obrazowania przedstawione są w górnych rzędach, a dla polaryzacji prostopadłej – w dolnych [14]

Natomiast w polu bliskim składowe radialne $E_r^{(s)}$ i $H_r^{(s)}$ wnoszą w natężenie światła wkład, który jest porównywalny z wkładem wnoszonym przez składowe $E_\theta^{(s)}$, $E_\varphi^{(s)}$, $H_\theta^{(s)}$ i $H_\varphi^{(s)}$. W przestrzeni otaczającej kulkę poszczególne składowe multipolowe interferują, tworząc w zależności od wielkości kątów θ i φ prążki interferencyjne. W pracy [14] zilustrowane zostały wielkości natężeń pól na płaszczyźnie umieszczonej w polu bliskim kulki w zależności od odległości d płaszczyzny interferencyjnej od środka kulki. Względnie szybki zanik udziału składowej radialnej $E_r^{(s)}$ w obrazie interferencyjnym wraz z odległością wpływa na istotną modyfikację powstającego obrazu w badanej płaszczyźnie. Rysunek 3.2 pochodzący z pracy [14] ilustruje te modyfikacje na przykładzie sferycznej kropli wody i kulki krzemowej (model ziarenka piasku) o wybranych rozmiarach.

3.2.1. Przybliżenie dalekiego pola

Wyrażenia (3.10)–(3.15) na poszczególne składowe pola elektromagnetycznego fali rozproszonej wyprowadzone zostały dla liniowo spolaryzowanej fali padającej i zapisane we współrzędnych wybranych zgodnie z rys. 3.1, na którym kierunek osi x pokrywa się z kierunkiem polaryzacji fali padającej.

Jak wspomniano wyżej, w dużych odległościach od cząstki, czyli w obszarze pola dalekiego, kiedy $kr \gg 1$, pole rozproszone jest poprzeczną falą kulistą o składowych pola elektrycznego $\mathbf{E}_s = (0, E_\theta^{(s)}, E_\varphi^{(s)})$:

$$E_\theta^{(s)}(\theta, \varphi, r) \rightarrow E_0 - \frac{e^{ik_{\text{out}}r}}{-ik_{\text{out}}r} S_2(\theta) \cos \varphi, \quad (3.29)$$

$$E_\varphi^{(s)}(\theta, \varphi, r) \rightarrow E_0 - \frac{e^{ik_{\text{out}}r}}{-ik_{\text{out}}r} S_1(\theta) \sin \varphi, \quad (3.30)$$

gdzie

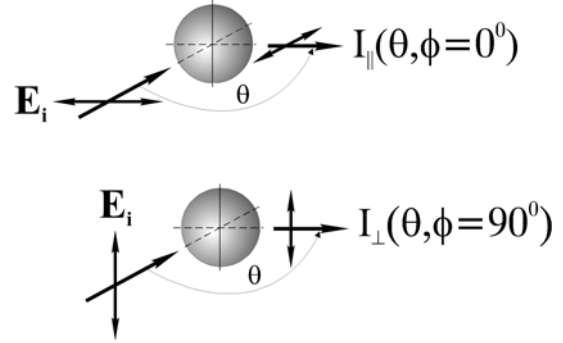
$$S_1(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left(a_l \frac{P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} - b_l P_l^{(1)'(\cos \theta)} \sin \theta \right), \quad (3.31)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left(-a_l P_l^{(1)'(\cos \theta)} \sin \theta + b_l \frac{P_l^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right). \quad (3.32)$$

Sferyczne funkcje Hankla zostały zastąpione ich wyrażeniami asymptotycznymi:

$$h_n^{(1)}(\rho) \rightarrow \frac{(-i)^n e^{i\varphi}}{i\rho}, \quad (3.33)$$

$$\frac{dh_n^{(1)}}{d\rho} \rightarrow \frac{(-i)^n e^{i\varphi}}{\rho}. \quad (3.34)$$



Rys. 3.1. Rozpraszanie światła na cząstce sferycznej: układ współrzędnych

W przybliżeniu dalekiego pola składowe $E_\theta^{(s)}$ i $E_\phi^{(s)}$ są odpowiednio składowymi równoległymi i prostopadłymi do płaszczyzny rozpraszania: $E_\theta^{(s)} = E_\parallel^{(s)}$ i $E_\phi^{(s)} = E_\perp^{(s)}$. Gdy jako miarę natężenia światła przyjmiemy drugą potęgę rzeczywistej amplitudy pola elektrycznego, otrzymujemy różne przestrzenne rozkłady natężeń światła rozproszonego $I_\parallel^{(s)}$ i $I_\perp^{(s)}$ dla polaryzacji równoległej ($\varphi = 0$) i prostopadłej ($\varphi = \pi/2$) do płaszczyzny obserwacji (rys. 3.3) wyrażone następująco [6]:

$$I_\parallel^{(s)}(R, \lambda, \theta, \varphi = 0) = I_0 \left(\frac{\lambda / \text{Ren}_{\text{out}}}{2\pi r} \right)^2 \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \left({}^e B_l(R, \lambda) P_l^{(1)'}(\cos\theta) \sin\theta - {}^m B_l(R, \lambda) \frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta} \right) \right|^2, \quad (3.35)$$

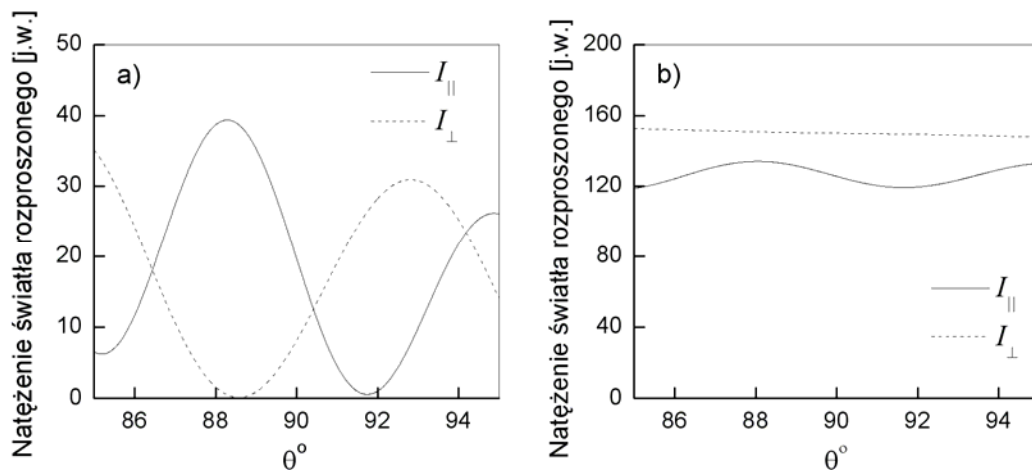
$$I_\perp^{(s)}(R, \lambda, \theta, \varphi = \pi/2) = I_0 \left(\frac{\lambda / \text{Ren}_{\text{out}}}{2\pi r} \right)^2 \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \left({}^e B_l(R, \lambda) \frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta} - {}^m B_l(R, \lambda) P_l^{(1)'}(\cos\theta) \sin\theta \right) \right|^2. \quad (3.36)$$

Oscylacyjny charakter wyrażeń (3.35) i (3.36) opisujących natężenie światła w polu dalekim wiąże się z interferencją poszczególnych składowych multipolowych pola elektromagnetycznego rozproszonego na kulce. Przykłady takich interferencji dla kropli wody i kulki krzemu w pobliżu kąta $\theta = \pi/2$ przedstawione są na rys. 3.2. Widać na nim, że w wypadku dużej widzialności prążków interferencyjnych występujących dla kropli wody (i

wielu innych kulek dielektrycznych) analiza obrazów interferencyjnych stanowić może efektywną metodę oceny ich rozmiaru (oraz współczynnika załamania).

Jeśli fala padająca spolaryzowana jest liniowo, fala rozproszona spolaryzowana jest również liniowo, o ile $\varphi = \pi/2$ lub 0 , czyli gdy płaszczyzna obserwacji jest prostopadła lub równoległa do kierunku polaryzacji wiązki padającej (rys. 3.3). W innym razie światło rozproszone spolaryzowane jest eliptycznie. Spostrzeżenie to można wykorzystać jako kryterium kulistości obiektu rozpraszającego [9] lub chmury składającej się z wielu obiektów [13]. Jeśli obserwować będziemy światło rozproszone pod kątem prostym o polaryzacji liniowej prostopadłej lub równoległej do płaszczyzny obserwacji, to w wypadku rozpraszania na obiekcie kulistym polaryzator o kierunku polaryzacji skrzyżowanym z kierunkiem polaryzacji światła padającego odetnie całkowicie światło rozproszone (rys. 3.4).

Przy dowolnej polaryzacji pola padającego $E_i = (0, E_x^{(s)}, E_y^{(s)})$ składowe pola padającego oraz rozproszonego w przybliżeniu dalekiego pola powiązane są w następujący sposób:



Rys. 3.4. Natężenia światła rozproszonego pod kątem prostym dla polaryzacji równoległej i prostopadłej do płaszczyzny rozpraszania w funkcji kąta θ dla cząstek wody (a) oraz sodu (b) ($R=2000$ nm, $\lambda=488$ nm) [10].

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^{(s)} \\ E_{\perp}^{(s)} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik_{\text{out}}(r-z)}}{-ik_{\text{out}}r} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^{(i)} \\ E_{\perp}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

gdzie

$$E_{\parallel}^{(s)} = E_x^{(i)} \cos \varphi + iE_y^{(i)} \sin \varphi, \quad (3.38)$$

$$E_{\perp}^{(s)} = E_x^{(i)} \sin \varphi + iE_y^{(i)} \cos \varphi \quad (3.39)$$

są składowymi wektora elektrycznego fali padającej odpowiednio równoległą i prostopadłą do płaszczyzny rozpraszania: $E_i = E_{\parallel}^{(i)} e_{\parallel} + E_{\perp}^{(i)} e_{\perp}$. Miarą polaryzacji światła rozpraszanego jest stopień polaryzacji:

$$P = \frac{|I_{\perp}^{(s)} - I_{\parallel}^{(s)}|}{|I_{\perp}^{(s)} + I_{\parallel}^{(s)}|}. \quad (3.40)$$

Jeśli na kulce rozpraszane jest światło niespolaryzowane, natężenie światła rozproszonego wyraża się jako $I_s = (I_{\perp}^{(s)} + I_{\parallel}^{(s)})/2$ [6, 8] i jest częściowo spolaryzowane w stopniu zależnym od kąta obserwacji θ względem kierunku wiązki padającej.

3.2.2. Obliczenia numeryczne rozkładu natężeń i przekrojów czynnych

Wyrazy rozwinięcia (3.18) i (3.19) można zapisać w innej postaci, bardziej przydatnej do obliczeń numerycznych:

$$a_l = \frac{\left(\frac{D_l(mx)}{m} + \frac{l}{x}\right) \psi_l(x) - \psi_{l-1}(x)}{\left(\frac{D_l(mx)}{m} + \frac{n}{x}\right) \xi_l(x) - \xi_{l-1}(x)}, \quad (3.41)$$

$$b_l = \frac{\left(mD_l(mx) + \frac{l}{x}\right) \psi_l(x) - \psi_{l-1}(x)}{\left(mD_l(mx) + \frac{l}{x}\right) \xi_l(x) - \xi_{l-1}(x)}, \quad (3.42)$$

gdzie D_l jest pochodną logarytmiczną:

$$D_l(mx) = \frac{d}{d(mx)} \ln \psi_l(mx). \quad (3.43)$$

Pochodna ta podlega następującym związkom rekurencyjnym:

$$D_{l-1} = \frac{l}{mx} - \frac{1}{D_l + l/\rho}. \quad (3.44)$$

Sumowanie nieskończonej liczby wyrazów szeregu w wyrażeniach na składowe pól elektrycznych i magnetycznych ograniczyć można do liczby l_{\max} wyrazów zgodnie z kryterium:

$$l_{\max} = x + 4x^{1/3} + 2, \quad (3.45)$$

zaś rząd obliczeń dla funkcji D_l :

$$l_{\max 1} = \max(l_{\max}, |mx|) + 15, \quad (3.46)$$

a pierwszym wyrazem rozpoczynającym rekurencję jest $D_{l_{\max 1}} = 0,0 + i0,0$.

Funkcje Riccatiego–Bessla $\psi_l(z)$, $\xi_l(z)$, $\chi_l(z)$ (patrz wyrażenia (3.24)) oraz ich pochodne spełniają związki rekurencyjne w następującej postaci:

$F_l(z) = \frac{2l-1}{z} F_{l-1}(z) - F_{l-2}(z)$ oraz $F_l'(z) = -\frac{l}{z} F_l(z) + F_{l-1}(z)$. Znając dwa pierwsze wyrazy tych związków dla $l=0$ oraz $l=1$:

$$\begin{aligned} \psi_0(z) &= \sin z, & \chi_0(z) &= \cos z, \\ \psi_1(z) &= \frac{1}{z} \sin z - \cos z, & \chi_1(z) &= \frac{1}{z} \cos z + \sin z, \end{aligned} \quad (3.47)$$

można wyliczyć każdy kolejny wyraz ciągu wraz z pochodnymi, niezbędnymi do obliczeń wartości współczynników a_l i b_l . Współczynniki te pozwalają znaleźć wyrażenia na wielkości mierzone: natężenie światła rozpraszanego pod danym kątem (wyrażenia (3.35), (3.36)) czy też przekroje czynne na rozpraszanie, absorpcję i ekstynkcję (wyrażenia (3.48)–(3.50)).

3.2.3. Całkowite przekroje czynne na ekstynkcję i rozpraszanie

Znajomość całkowitej ilości światła rozproszonego przez kulkę o danych parametrach oraz przez nią zaabsorbowanego ma duże znaczenie praktyczne. Gdy ośrodek otaczający kulkę nie absorbuje fali elektromagnetycznej ($n_{\text{out}} = \text{Re } n_{\text{out}}$), całkowita energia utracona przez falę padającą musi odnaleźć się w energii zaabsorbowanej przez kulkę i na niej rozproszonej. Z rozważań dotyczących przepływu energii przez hipotetyczną sferę otaczającą cząstkę rozpraszającą wynikają następujące całkowite przekroje czynne, odpowiednio na rozpraszanie, absorpcję i ekstynkcję [6–8]:

$$\sigma_s = \frac{\lambda_{\text{out}}^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2), \quad (3.48)$$

$$\sigma_a = \frac{\lambda_{\text{out}}^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \text{Re}(a_l + b_l) - \sigma_s, \quad (3.49)$$

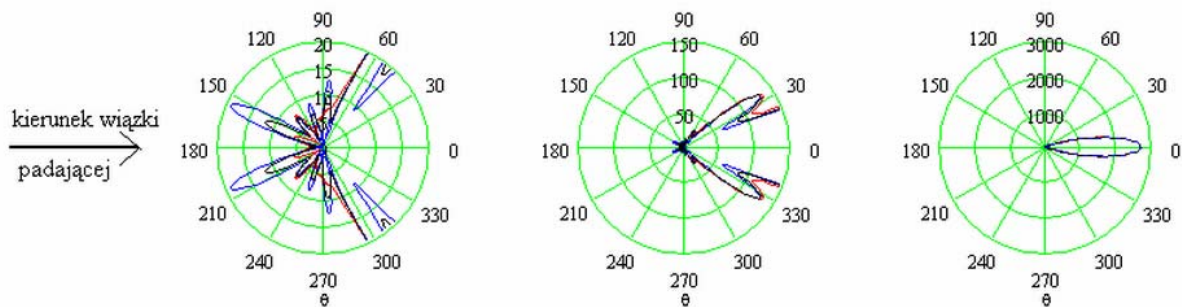
$$\sigma_{\text{ext}} = \sigma_a + \sigma_s. \quad (3.50)$$

Ośrodek zawierający N takich samych cząstek rozpraszających w jednostce objętości stanowi najprostszy model ośrodka rozpraszającego. Miarą tłumienia natężenia światła w ośrodku jest objętościowy współczynnik ekstynkcji α . Natężenie fali elektromagnetycznej

rozchodzącej się w ośrodku jednorodnym wzdłuż osi z zmienia się, niezależnie od jej polaryzacji, zgodnie z prawem Bouguera–Lamberta–Beera :

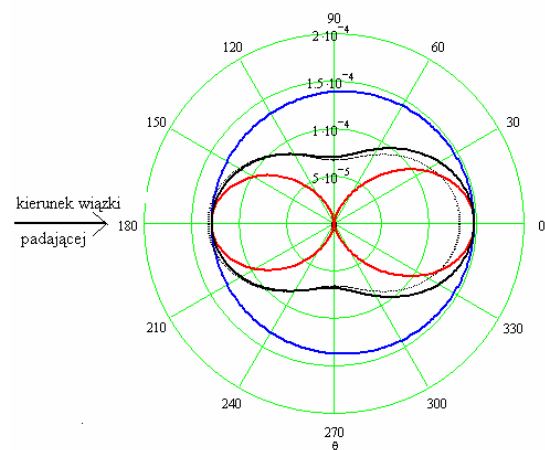
$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (3.51)$$

gdzie I_0 jest natężeniem dla $z = 0$. Przy danej koncentracji cząstek rozpraszających o wielkości tłumienia decyduje długość fali wiązki rozpraszanej λ_{out} , rozmiar kulek, ich właściwości optyczne dla danej długości fali (zespolony współczynnik załamania). W zależności od tych parametrów o tłumieniu decydować może absorpcja lub/i rozpraszanie.



Rys. 3.5. Rozkład kątowy natężenia światła ($\lambda=488\text{nm}$) rozproszonego przez cząstkę ($R=600\text{nm}$) dla polaryzacji: równoległej $I_{\parallel}^{(s)}(\theta)$ (linia czerwona) i prostopadłej $I_{\perp}^{(s)}(\theta)$ (linia niebieska) do płaszczyzny rozpraszania oraz dla światła niespolaryzowanego $I_s(\theta)$ (linia czarna). Rysunki różnią się jedynie skalą radialną.

Rys. 3.6. Rozkład kątowy natężenia światła ($\lambda=488\text{nm}$) rozproszonego przez cząstkę ($R=30\text{nm}$) zgodnie z teorią Mie (bez przybliżeń) dla polaryzacji: równoległej $I_{\parallel}^{(s)}(\theta)$ (linia czerwona) i prostopadłej $I_{\perp}^{(s)}(\theta)$ (linia niebieska) do płaszczyzny rozpraszania oraz dla światła niespolaryzowanego $I_s(\theta)$ (linia czarna). Linia czarna przerywana ilustruje rozkład $I_s^{(R)}(\theta)$ wynikający ze wzoru Rayleigh'a (3.56).



Dla ośrodków słabo rozpraszających światło ($\sigma_s \approx 0$) wielkość współczynnika tłumienia wyraża się następująco:

$$\alpha = N\sigma_a. \quad (3.52)$$

W ogólności na wielkość współczynnika tłumienia α ma wpływ zarówno rozpraszanie, jak i absorpcja. Jednak często stosowane wyrażenie $\alpha = N(\sigma_a + \sigma_s) = N\sigma_{\text{ext}}$ nie zawsze prawidłowo opisuje proces rozpraszania. Przyczyną może być na przykład fakt, że im większa jest cząstka rozpraszająca, tym intensywniej fala padająca rozpraszana jest „do przodu”, czyli w kierunku propagacji wiązki światła. Rozkłady kątowe natężeń światła rozproszonego przez cząstkę „dużą” (w porównaniu z długością fali) zilustrowane na rys. 3.5 w istotny sposób różnią się od rozkładów na rys. 3.6 (cząstka „mała”). Całkowity przekrój czynny na rozpraszanie σ_s nie zawiera informacji o asymetrii rozpraszania (jest wielkością scałkowaną po kątach). W pomiarze wielkości rozpraszania „do przodu” istotna jest interferencja pola fali rozproszonej i pola fali padającej. W pewnych warunkach może też się zdarzyć, że część światła rozproszonego powróci do wiązki w wyniku wielokrotnego rozpraszania na cząstkach. Światło rozproszone, w przeciwieństwie do światła zaabsorbowanego przez cząstki, nie musi być więc definitywnie utracone z wiązki rozchodzącej się w danym kierunku [8].

3.3. Rozpraszanie Rayleigha

Teoria Miego sformułowana jest zarówno dla kulki o dowolnie dużym, jak i dowolnie małym promieniu względem długości fali wiązki rozpraszanej (w drugim wypadku z zastrzeżeniem dotyczącym sensowności stosowania pojęcia współczynnika załamania). Mając narzędzia numeryczne teorii Miego, nie ma potrzeby dokonywać przybliżeń dla kulek małych w porównaniu z długością fali. Literaturowy termin „rozpraszanie Rayleigha” funkcjonuje w kontekście rozpraszania na obiektach małych w porównaniu z długością fali: $R \ll \lambda$. Podkreśla się proporcjonalność natężenia światła rozproszonego do odwrotności czwartej potęgi długości fali: $I_s \propto \lambda^{-4}$.

Jeśli w wyrażeniach (3.41) i (3.42) na współczynniki rozwinięcia a_l i b_l skorzysta się z rozwinięcia sferycznych funkcji Bessla w szereg potęgowy i zachowa tylko pierwsze wyrazy rozwinięcia dla pierwszej fali parcjalnej $l = 1$, przestrzenny rozkład natężeń światła rozproszonego dla polaryzacji równoległej (3.35) i prostopadłej (3.36) do płaszczyzny obserwacji można wyrazić następująco [8]:

$$I_{||}^{(s)} = \frac{9}{16\pi^2 r^2} \lambda_{\text{out}}^2 |a_1|^2 \cos^2 \theta, \quad (3.53)$$

$$a_l = -\frac{i2x^3}{3} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2}. \quad (3.55)$$

$$I_{\perp}^{(s)} = \frac{9}{16\pi^2 r^2} \lambda_{\text{out}}^2 |a_l|^2, \quad (3.54)$$

Przyjęto, że $|m|x \ll 1$; wówczas $|a_l| \gg |b_l|$. Gdy światło padające jest niespolaryzowane, natężenie światła rozproszonego wyraża się wzorem:

$$I_s^{(R)} = \frac{8\pi^4 R^6}{\lambda_{\text{out}}^4 r^2} I_0 \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.56)$$

stopień polaryzacji zaś jest funkcją kąta obserwacji względem kierunku propagacji wiązki padającej i wynosi

$$P = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (3.57)$$

Jeśli więc przyjąć, że wyrażenie $[(m^2 - 1)/(m^2 + 2)]^2$ słabo zależy od długości fali (co nie jest w ogólności prawdą), to natężenie światła rozproszonego jest proporcjonalne do odwrotności czwartej potęgi długości fali. Rozpraszanie na obiektach mających tę cechę nazywane jest rozpraszaniem Rayleigha. Jednak historyczne wyprowadzenie Rayleigha dotyczyło nieabsorbujących cząstek o nieokreślonym kształcie reprezentowanych przez liniowe dipole, a nie kulek małych w porównaniu z długością fali. Tak więc teoria Rayleigha nie uwzględnia przestrzennej rozciągłości obiektu rozpraszającego; wpływ polaryzacji światła na rozpraszanie nie jest więc w tym opisie uwzględniony.

Zawsze gdy rozpraszanie zachodzi na obiektach kulistych o rozmiarach porównywalnych z długością fali (lub większych) bądź gdy ważne są relacje polaryzacyjne, niezbędne jest użycie teorii Miego w jej pełnym sformułowaniu.

Literatura

- [1] R. Fuchs, P. Halevi: *Basic concepts and formalism of spatial dispersion*, w *Spatial dispersion in solids and plasmas*, ed. P. Halevi, North-Holland, Amsterdam 1992.
- [2] Ch. Kittel: *Introduction to solid state physics*, 7th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York 1996.
- [3] A. Liebsch: *Electronic excitations at metal surfaces*, Plenum Press, New York 1997.
- [4] U. Kreibig, M. Vollmer: *Optical properties of metal clusters*, Springer Verlag 1995.
- [5] G. Mie, *Ann. Phys.*, **377**, 25 (1908).

- [6] M. Born, E. Wolf: *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford 1970.
- [7] J. A. Stratton: *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1941.
- [8] C. F. Bohren, D. R. Huffman: *Absorption and scattering of light by small particles*, John Wiley & Sons, Inc., New York 1983.
- [9] W. Bazhan, K. Kolwas, M. Kolwas: *Opt. Comm.*, **211**, 171 (2002).
- [10] W. Bazhan: *Rozpraszanie światła na pojedynczych mikrocząstkach*, praca doktorska, Instytut Fizyki PAN 2004 (<http://www.ifpan.edu.pl/ON-2/on22/thesis.html>).
- [11] K. Kolwas, S. Demianiuk, M. Kolwas: *J. Phys.*, **B 29**, 4761 (1996).
- [12] K. Kolwas, A. Derkachova: *Comp. Math. Sci.*, (2005) (w druku).
- [13] S. Demianiuk, K. Kolwas: *J. Phys.*, **B 34**, 1651 (2001).
- [14] W. Bazhan, K. Kolwas: *Comp. Phys. Com.*, **165**, 191 (2005).